Différentielle d'une fonction de plusieurs variables et écarts types

Y. Moncheaux

Novembre 2017

Table des matières

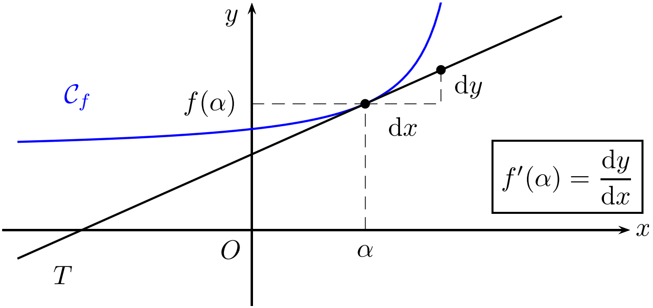
1. Dérivée

2. Fonction de plusieurs variables

Que représente graphiquement la dérivée d'une fonction f en un point ?

Que représente graphiquement la dérivée d'une fonction f en un point ?
$f'(\alpha)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse α.

Que représente graphiquement la dérivée d'une fonction f en un point ?
$f'(\alpha)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse α.



Notation de Leibniz :

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

où $\mathrm{d}x$ est une petite variation (« infinitésimale ») de x et $\mathrm{d}f$ est une petite variation de $f(x)$.

Notation de Leibniz :

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

où $\mathrm{d}x$ est une petite variation (« infinitésimale ») de x et $\mathrm{d}f$ est une petite variation de $f(x)$.

$$\mathrm{d}f = f' \times \mathrm{d}x$$

Notation de Leibniz :

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

où $\mathrm{d}x$ est une petite variation (« infinitésimale ») de x et $\mathrm{d}f$ est une petite variation de $f(x)$.

$$\mathrm{d}f = f' \times \mathrm{d}x$$

En fait :

Notation de Leibniz :

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

où $\mathrm{d}x$ est une petite variation (« infinitésimale ») de x et $\mathrm{d}f$ est une petite variation de $f(x)$.

$$\mathrm{d}f = f' \times \mathrm{d}x$$

En fait :

$$\Delta f \simeq f' \times \Delta x$$

On peut calculer une augmentation (ou diminution) de $f(x)$ quand on connaît celle de x (qui doit être petite) et la valeur de la dérivée f'.

Exemple 1

De combien augmente l'aire d'un carré quand son côté augmente de 4 mm ?

Exemple 1

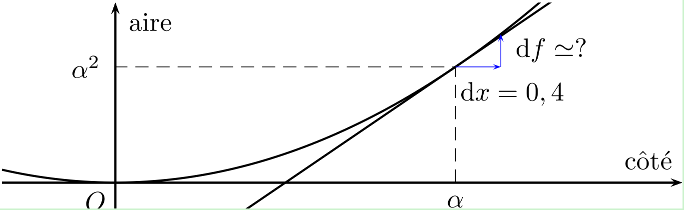
De combien augmente l'aire d'un carré quand son côté augmente de 4 mm ?
La réponse n'est pas 16 mm^2 !

Exemple 1

De combien augmente l'aire d'un carré quand son côté augmente de 4 mm ?
La réponse n'est pas 16 mm^2 !
Soit $f(x) = x^2$ et α le côté du carré initial.

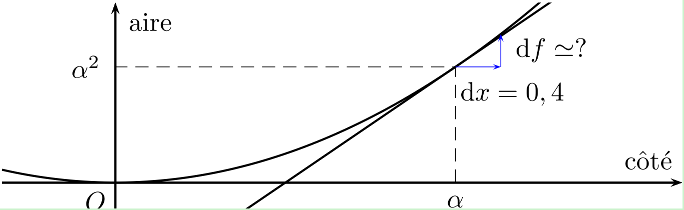
Exemple 1

De combien augmente l'aire d'un carré quand son côté augmente de 4 mm ?
La réponse n'est pas 16 mm^2 !
Soit $f(x) = x^2$ et α le côté du carré initial.



Exemple 1

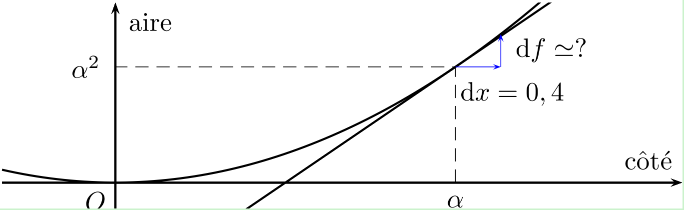
De combien augmente l'aire d'un carré quand son côté augmente de 4 mm ?
La réponse n'est pas 16 mm^2 !
Soit $f(x) = x^2$ et α le côté du carré initial.



$\mathrm{d}f \simeq f' \times \mathrm{d}x$

Exemple 1

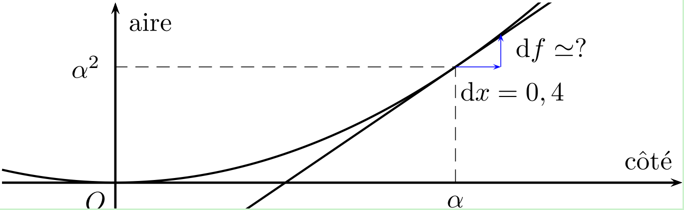
De combien augmente l'aire d'un carré quand son côté augmente de 4 mm ?
La réponse n'est pas 16 mm^2 !
Soit $f(x) = x^2$ et α le côté du carré initial.



$\mathrm{d}f \simeq f' \times \mathrm{d}x$ or $f'(x) = 2x$ donc $f'(\alpha) = 2\alpha$: il faut connaître α.

Exemple 1

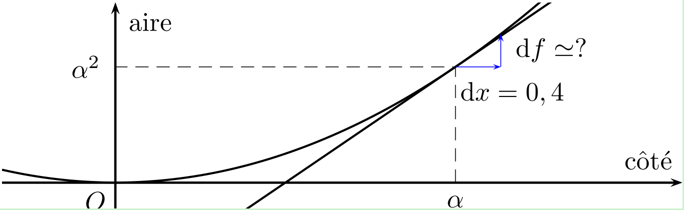
De combien augmente l'aire d'un carré quand son côté augmente de 4 mm ?
La réponse n'est pas 16 mm^2 !
Soit $f(x) = x^2$ et α le côté du carré initial.



$\mathrm{d}f \simeq f' \times \mathrm{d}x$ or $f'(x) = 2x$ donc $f'(\alpha) = 2\alpha$: il faut connaître α. Par exemple, si le carré fait initialement $\alpha = 3$ cm alors $f'(3) = 6$

Exemple 1

De combien augmente l'aire d'un carré quand son côté augmente de 4 mm ?
La réponse n'est pas 16 mm^2 !
Soit $f(x) = x^2$ et α le côté du carré initial.



$\mathrm{d}f \simeq f' \times \mathrm{d}x$ or $f'(x) = 2x$ donc $f'(\alpha) = 2\alpha$: il faut connaître α. Par exemple, si le carré fait initialement $\alpha = 3$ cm alors $f'(3) = 6$ d'où $\mathrm{d}f \simeq 6 \times 0,4 = 2,4$ cm^2.

Dérivées partielles

Exemple 2

Le volume V d'un cylindre est fonction du rayon r de sa base et de sa hauteur h :

$$V = f(r, h)$$

ici

Dérivées partielles

Exemple 2

Le volume V d'un cylindre est fonction du rayon r de sa base et de sa hauteur h :

$$V = f(r, h)$$

ici $V = \pi r^2 h$.

Dérivées partielles

Exemple 2

Le volume V d'un cylindre est fonction du rayon r de sa base et de sa hauteur h :

$$V = f(r, h)$$

ici $V = \pi r^2 h$.

On peut dériver la fonction suivant r (si le rayon varie) :

Dérivées partielles

Exemple 2

Le volume V d'un cylindre est fonction du rayon r de sa base et de sa hauteur h :

$$V = f(r, h)$$

ici $V = \pi r^2 h$.

On peut dériver la fonction suivant r (si le rayon varie) :

$f'_r = \dfrac{\partial f}{\partial r} =$

Dérivées partielles

Exemple 2

Le volume V d'un cylindre est fonction du rayon r de sa base et de sa hauteur h :

$$V = f(r, h)$$

ici $V = \pi r^2 h$.

On peut dériver la fonction suivant r (si le rayon varie) :

$$f'_r = \frac{\partial f}{\partial r} = \pi \times (2r)h = 2\pi r h$$

Dérivées partielles

Exemple 2

Le volume V d'un cylindre est fonction du rayon r de sa base et de sa hauteur h :

$$V = f(r, h)$$

ici $V = \pi r^2 h$.

On peut dériver la fonction suivant r (si le rayon varie) :

$$f'_r = \frac{\partial f}{\partial r} = \pi \times (2r)h = 2\pi r h$$

ou suivant h (si la hauteur varie) :

Dérivées partielles

Exemple 2

Le volume V d'un cylindre est fonction du rayon r de sa base et de sa hauteur h :

$$V = f(r,h)$$

ici $V = \pi r^2 h$.

On peut dériver la fonction suivant r (si le rayon varie) :

$f'_r = \dfrac{\partial f}{\partial r} = \pi \times (2r)h = 2\pi r h$

ou suivant h (si la hauteur varie) : $f'_h = \dfrac{\partial f}{\partial h} =$

Dérivées partielles

Exemple 2

Le volume V d'un cylindre est fonction du rayon r de sa base et de sa hauteur h :

$$V = f(r, h)$$

ici $V = \pi r^2 h$.

On peut dériver la fonction suivant r (si le rayon varie) :
$f'_r = \dfrac{\partial f}{\partial r} = \pi \times (2r)h = 2\pi r h$

ou suivant h (si la hauteur varie) : $f'_h = \dfrac{\partial f}{\partial h} = \pi r^2 \times 1 = \pi r^2$.

Différentielle

Soit f une fonction *différentiable* de deux variables x et y.

Différentielle

Soit f une fonction *différentiable* de deux variables x et y.
Une petite variation de x engendre une variation de f :
$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x$.

Différentielle

Soit f une fonction *différentiable* de deux variables x et y.
Une petite variation de x engendre une variation de f :
$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x$.

Une petite variation de y engendre une variation de f :
$\mathrm{d}f = f'_y \times \mathrm{d}y$.

Différentielle

Soit f une fonction *différentiable* de deux variables x et y.
Une petite variation de x engendre une variation de f :
$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x$.
Une petite variation de y engendre une variation de f :
$\mathrm{d}f = f'_y \times \mathrm{d}y$.

Une petite variation de x et de y engendre une variation de f :

$$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x + f'_y \times \mathrm{d}y.$$

(c'est en fait une approximation)

Différentielle

Soit f une fonction *différentiable* de deux variables x et y.
Une petite variation de x engendre une variation de f :
$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x$.
Une petite variation de y engendre une variation de f :
$\mathrm{d}f = f'_y \times \mathrm{d}y$.

Une petite variation de x et de y engendre une variation de f :

$$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x + f'_y \times \mathrm{d}y.$$

(c'est en fait une approximation)

C'est ce qu'on appelle la différentielle de f.

$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x + f'_y \times \mathrm{d}y$

Exemple 2

Un cylindre a pour rayon 3 m et pour hauteur 5 m.
De combien augmente son volume si le rayon augmente de 1 cm et si la hauteur augmente de 2 cm ?

$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x + f'_y \times \mathrm{d}y$

Exemple 2

Un cylindre a pour rayon 3 m et pour hauteur 5 m.
De combien augmente son volume si le rayon augmente de 1 cm et si la hauteur augmente de 2 cm ?

$$\mathrm{d}f \simeq f'_r \times \mathrm{d}r + f'_h \times \mathrm{d}h$$

$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x + f'_y \times \mathrm{d}y$

Exemple 2

Un cylindre a pour rayon 3 m et pour hauteur 5 m.
De combien augmente son volume si le rayon augmente de 1 cm et si la hauteur augmente de 2 cm ?

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &\simeq f'_r \times \mathrm{d}r + f'_h \times \mathrm{d}h \\ &\simeq 2\pi r h \times \mathrm{d}r + \pi r^2 \times \mathrm{d}h \end{aligned}$$

$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x + f'_y \times \mathrm{d}y$

Exemple 2

Un cylindre a pour rayon 3 m et pour hauteur 5 m.
De combien augmente son volume si le rayon augmente de 1 cm et si la hauteur augmente de 2 cm ?

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &\simeq f'_r \times \mathrm{d}r + f'_h \times \mathrm{d}h \\
&\simeq 2\pi r h \times \mathrm{d}r + \pi r^2 \times \mathrm{d}h \\
&\simeq 2\pi \times 3 \times 5 \times 0,01 + \pi \times 3^2 \times 0,02
\end{aligned}$$

$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x + f'_y \times \mathrm{d}y$

Exemple 2

Un cylindre a pour rayon 3 m et pour hauteur 5 m.
De combien augmente son volume si le rayon augmente de 1 cm et si la hauteur augmente de 2 cm ?

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &\simeq f'_r \times \mathrm{d}r + f'_h \times \mathrm{d}h \\
&\simeq 2\pi r h \times \mathrm{d}r + \pi r^2 \times \mathrm{d}h \\
&\simeq 2\pi \times 3 \times 5 \times 0,01 + \pi \times 3^2 \times 0,02 \\
&\simeq 0,48\pi \simeq 1,50796 \text{ m}^3.
\end{aligned}$$

$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x + f'_y \times \mathrm{d}y$

Exemple 2

Un cylindre a pour rayon 3 m et pour hauteur 5 m.
De combien augmente son volume si le rayon augmente de 1 cm et si la hauteur augmente de 2 cm ?

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &\simeq f'_r \times \mathrm{d}r + f'_h \times \mathrm{d}h \\
&\simeq 2\pi r h \times \mathrm{d}r + \pi r^2 \times \mathrm{d}h \\
&\simeq 2\pi \times 3 \times 5 \times 0,01 + \pi \times 3^2 \times 0,02 \\
&\simeq 0,48\pi \simeq 1,50796 \text{ m}^3.
\end{aligned}$$

(valeur exacte : $\pi \times 3,01^2 \times 5,02 - \pi \times 3^2 \times 5 = 0,481702\pi$ soit environ $1,514978439$).

Passage aux écarts types

Á partir de la formule

$$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x + f'_y \times \mathrm{d}y$$

Passage aux écarts types

Á partir de la formule

$$\mathrm{d}f = f'_x \times \mathrm{d}x + f'_y \times \mathrm{d}y$$

on peut démontrer que

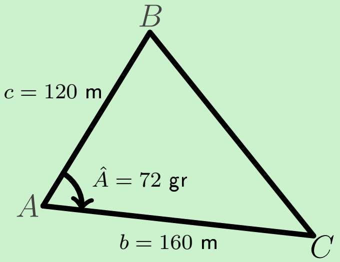
$$(\sigma_f)^2 = (f'_x \times \sigma_x)^2 + (f'_y \times \sigma_y)^2$$

(extrait du cours de M. Cauliez)

Exemple 3

Calculer l'écart-type sur l'aire du triangle ci-contre, sachant que :

- écart-type sur $\hat{A}$: 3 cgr ;
- écart-type sur b : 10 cm ;
- écart-type sur c : 7 cm.



$$(\sigma_f)^2 = (f'_x \times \sigma_x)^2 + (f'_y \times \sigma_y)^2 + \dots$$

Exemple 3

Données : $\hat{A} = 72$ gr et $\sigma_{\hat{A}} = 0,03$ gr ; $b = 160$ et $\sigma_b = 0,1$; $c = 120$ et $\sigma_c = 0,1$.

$$(\sigma_f)^2 = (f'_x \times \sigma_x)^2 + (f'_y \times \sigma_y)^2 + \ldots$$

Exemple 3

Données : $\hat{A} = 72$ gr et $\sigma_{\hat{A}} = 0,03$ gr ; $b = 160$ et $\sigma_b = 0,1$; $c = 120$ et $\sigma_c = 0,1$.

L'aire se calcule avec $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ donc $2S = bc \sin \hat{A}$.

$$(\sigma_f)^2 = (f'_x \times \sigma_x)^2 + (f'_y \times \sigma_y)^2 + \dots$$

Exemple 3

Données : $\hat{A} = 72$ gr et $\sigma_{\hat{A}} = 0,03$ gr ; $b = 160$ et $\sigma_b = 0,1$; $c = 120$ et $\sigma_c = 0,1$.

L'aire se calcule avec $S = \dfrac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ donc $2S = bc \sin \hat{A}$.

Si on écrit $2S = bc \sin \hat{A} = f(b, c, \hat{A})$ alors :

$$(2\sigma_S)^2 = (f'_b.\sigma_b)^2 + (f'_c.\sigma_c)^2 + (f'_{\hat{A}}.\sigma_{\hat{A}})^2$$

$$(\sigma_f)^2 = (f'_x \times \sigma_x)^2 + (f'_y \times \sigma_y)^2 + \dots$$

Exemple 3

Données : $\hat{A} = 72$ gr et $\sigma_{\hat{A}} = 0,03$ gr ; $b = 160$ et $\sigma_b = 0,1$; $c = 120$ et $\sigma_c = 0,1$.

L'aire se calcule avec $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ donc $2S = bc \sin \hat{A}$.

Si on écrit $2S = bc \sin \hat{A} = f(b, c, \hat{A})$ alors :

$$\begin{aligned} (2\sigma_S)^2 &= (f'_b.\sigma_b)^2 + (f'_c.\sigma_c)^2 + (f'_{\hat{A}}.\sigma_{\hat{A}})^2 \\ &= (c \sin \hat{A}.\sigma_b)^2 + (b \sin \hat{A}.\sigma_c)^2 + (bc \cos \hat{A}.\sigma_{\hat{A}})^2 \end{aligned}$$

$$(\sigma_f)^2 = (f'_x \times \sigma_x)^2 + (f'_y \times \sigma_y)^2 + \dots$$

Exemple 3

Données : $\hat{A} = 72$ gr et $\sigma_{\hat{A}} = 0,03$ gr ; $b = 160$ et $\sigma_b = 0,1$; $c = 120$ et $\sigma_c = 0,1$.

L'aire se calcule avec $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ donc $2S = bc \sin \hat{A}$.

Si on écrit $2S = bc \sin \hat{A} = f(b, c, \hat{A})$ alors :

$$\begin{aligned}
(2\sigma_S)^2 &= (f'_b.\sigma_b)^2 + (f'_c.\sigma_c)^2 + (f'_{\hat{A}}.\sigma_{\hat{A}})^2 \\
&= (c \sin \hat{A}.\sigma_b)^2 + (b \sin \hat{A}.\sigma_c)^2 + (bc \cos \hat{A}.\sigma_{\hat{A}})^2 \\
&= (c \sin \hat{A}.\sigma_b)^2 + (b \sin \hat{A}.\sigma_c)^2 + (bc \cos \hat{A} \tan \sigma_{\hat{A}})^2
\end{aligned}$$

$$(\sigma_f)^2 = (f'_x \times \sigma_x)^2 + (f'_y \times \sigma_y)^2 + \dots$$

Exemple 3

Données : $\hat{A} = 72$ gr et $\sigma_{\hat{A}} = 0,03$ gr ; $b = 160$ et $\sigma_b = 0,1$; $c = 120$ et $\sigma_c = 0,1$.

L'aire se calcule avec $S = \dfrac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ donc $2S = bc \sin \hat{A}$.

Si on écrit $2S = bc \sin \hat{A} = f(b, c, \hat{A})$ alors :

$$\begin{aligned}
(2\sigma_S)^2 &= (f'_b.\sigma_b)^2 + (f'_c.\sigma_c)^2 + (f'_{\hat{A}}.\sigma_{\hat{A}})^2 \\
&= (c \sin \hat{A}.\sigma_b)^2 + (b \sin \hat{A}.\sigma_c)^2 + (bc \cos \hat{A}.\sigma_{\hat{A}})^2 \\
&= (c \sin \hat{A}.\sigma_b)^2 + (b \sin \hat{A}.\sigma_c)^2 + (bc \cos \hat{A} \tan \sigma_{\hat{A}})^2 \\
&\simeq 235,4
\end{aligned}$$

$$(\sigma_f)^2 = (f'_x \times \sigma_x)^2 + (f'_y \times \sigma_y)^2 + \dots$$

Exemple 3

Données : $\hat{A} = 72$ gr et $\sigma_{\hat{A}} = 0,03$ gr ; $b = 160$ et $\sigma_b = 0,1$; $c = 120$ et $\sigma_c = 0,1$.

L'aire se calcule avec $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ donc $2S = bc \sin \hat{A}$.

Si on écrit $2S = bc \sin \hat{A} = f(b, c, \hat{A})$ alors :

$$\begin{aligned} (2\sigma_S)^2 &= (f'_b.\sigma_b)^2 + (f'_c.\sigma_c)^2 + (f'_{\hat{A}}.\sigma_{\hat{A}})^2 \\ &= (c \sin \hat{A}.\sigma_b)^2 + (b \sin \hat{A}.\sigma_c)^2 + (bc \cos \hat{A}.\sigma_{\hat{A}})^2 \\ &= (c \sin \hat{A}.\sigma_b)^2 + (b \sin \hat{A}.\sigma_c)^2 + (bc \cos \hat{A} \tan \sigma_{\hat{A}})^2 \\ &\simeq 235,4 \end{aligned}$$

donc $\sigma_S \simeq \frac{\sqrt{235,4}}{2} \simeq 7,7$ m^2 (pour une aire $S \simeq 8686,4$ m^2).

$$(\sigma_f)^2 = (f'_x \times \sigma_x)^2 + (f'_y \times \sigma_y)^2 + \ldots$$

Exemple 4

Sachant que

$$DN_i = \frac{D_h}{\tan \hat{V}}$$

comment trouver l'écart type sur DN_i connaissant ceux sur D_h et sur $\hat{V}$?

$$(\sigma_f)^2 = (f'_x \times \sigma_x)^2 + (f'_y \times \sigma_y)^2 + \ldots$$

Exemple 4

Sachant que

$$DN_i = \frac{D_h}{\tan \hat{V}}$$

comment trouver l'écart type sur DN_i connaissant ceux sur D_h et sur $\hat{V}$?

DN_i dépend (est fonction) de D_h et de $\hat{V}$:

$$DN_i = f(D_h; \hat{V})$$

$$(\sigma_f)^2 = (f'_x \times \sigma_x)^2 + (f'_y \times \sigma_y)^2 + \ldots$$

Exemple 4

Sachant que

$$DN_i = \frac{D_h}{\tan \hat{V}}$$

comment trouver l'écart type sur DN_i connaissant ceux sur D_h et sur $\hat{V}$?

DN_i dépend (est fonction) de D_h et de $\hat{V}$:

$$DN_i = f(D_h; \hat{V})$$

donc

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2.$$

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{D_h} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial D_h}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{D_h} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial D_h}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.

D_h varie : $D_h = x$

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{D_h} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial D_h}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.

D_h varie : $D_h = x$

$\hat{V}$ ne varie pas : $\tan \hat{V} = k$

$$\sigma_{DN_i}^2 = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{D_h} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial D_h}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.

D_h varie : $D_h = x$

$\hat{V}$ ne varie pas : $\tan \hat{V} = k$

$DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$ devient donc

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{D_h} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial D_h}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.

D_h varie : $D_h = x$

$\hat{V}$ ne varie pas : $\tan \hat{V} = k$

$DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$ devient donc $f(x) = \dfrac{x}{k} = \dfrac{1}{k}\,x$

$$\sigma_{DN_i}^2 = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{D_h} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial D_h}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.
D_h varie : $D_h = x$
$\hat{V}$ ne varie pas : $\tan \hat{V} = k$
$DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$ devient donc $f(x) = \dfrac{x}{k} = \dfrac{1}{k}x$
ce qui donne $f'(x) = \dfrac{1}{k}$

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{D_h} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial D_h}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.

D_h varie : $D_h = x$

$\hat{V}$ ne varie pas : $\tan \hat{V} = k$

$DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$ devient donc $f(x) = \dfrac{x}{k} = \dfrac{1}{k} x$

ce qui donne $f'(x) = \dfrac{1}{k}$ donc $\boxed{f'_{D_h} = \dfrac{1}{\tan \hat{V}}}$

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{\hat{V}} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial \hat{V}}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.

$$\sigma_{DN_i}^2 = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{\hat{V}} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial \hat{V}}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.

D_h ne varie pas : $D_h = k$

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{\hat{V}} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial \hat{V}}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.

D_h ne varie pas : $D_h = k$

$\hat{V}$ varie : $\tan \hat{V} = \tan x$ (qui se dérive en $\dfrac{1}{\cos^2 x}$)

$$\sigma_{DN_i}^2 = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{\hat{V}} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial \hat{V}}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.

D_h ne varie pas : $D_h = k$

$\hat{V}$ varie : $\tan \hat{V} = \tan x$ (qui se dérive en $\dfrac{1}{\cos^2 x}$)

$DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$ devient donc

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{\hat{V}} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial \hat{V}}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.

D_h ne varie pas : $D_h = k$

$\hat{V}$ varie : $\tan \hat{V} = \tan x$ (qui se dérive en $\dfrac{1}{\cos^2 x}$)

$DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$ devient donc $f(x) = \dfrac{k}{\tan x}$

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{\hat{V}} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial \hat{V}}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.

D_h ne varie pas : $D_h = k$

$\hat{V}$ varie : $\tan \hat{V} = \tan x$ (qui se dérive en $\dfrac{1}{\cos^2 x}$)

$DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$ devient donc $f(x) = \dfrac{k}{\tan x}$

$$f'(x) = \frac{0 \times \tan x - k \times (1/\cos^2 x)}{\tan^2 x} = -k \times \frac{1}{\cos^2 x \times \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{-k}{\sin^2 x}$$

$$\sigma_{DN_i}^2 = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

On cherche $f'_{\hat{V}} = \dfrac{\partial Dn_i}{\partial \hat{V}}$ sachant que $DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$.

D_h ne varie pas : $D_h = k$

$\hat{V}$ varie : $\tan \hat{V} = \tan x$ (qui se dérive en $\dfrac{1}{\cos^2 x}$)

$DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$ devient donc $f(x) = \dfrac{k}{\tan x}$

$f'(x) = \dfrac{0 \times \tan x - k \times (1/\cos^2 x)}{\tan^2 x} = -k \times \dfrac{1}{\cos^2 x \times \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} =$

$\dfrac{-k}{\sin^2 x}$ donc $\boxed{f'_{\hat{V}} = \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}}$

$$\sigma_{DN_i}^2 = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

$f'_{D_h} = \dfrac{1}{\tan \hat{V}}$ et $f'_{\hat{V}} = \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}$

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

$f'_{D_h} = \dfrac{1}{\tan \hat{V}}$ et $f'_{\hat{V}} = \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}$

donc $\sigma^2_{DN_i} = \left(\sigma_{D_h} \times \dfrac{1}{\tan \hat{V}}\right)^2 + \left(\sigma_{\hat{V}} \times \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}\right)^2.$

$$\sigma_{DN_i}^2 = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

$f'_{D_h} = \dfrac{1}{\tan \hat{V}}$ et $f'_{\hat{V}} = \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}$

donc $\sigma_{DN_i}^2 = \left(\sigma_{D_h} \times \dfrac{1}{\tan \hat{V}}\right)^2 + \left(\sigma_{\hat{V}} \times \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}\right)^2$.

En pratique, $\sigma_{D_h} \times \dfrac{1}{\tan \hat{V}}$ est considéré comme négligeable

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

$f'_{D_h} = \dfrac{1}{\tan \hat{V}}$ et $f'_{\hat{V}} = \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}$

donc $\sigma^2_{DN_i} = \left(\sigma_{D_h} \times \dfrac{1}{\tan \hat{V}}\right)^2 + \left(\sigma_{\hat{V}} \times \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}\right)^2$.

En pratique, $\sigma_{D_h} \times \dfrac{1}{\tan \hat{V}}$ est considéré comme négligeable et on remplace $\sigma_{\hat{V}}$ par $\tan \sigma_{\hat{V}}$ pour éviter la conversion grades vers radians.

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

$f'_{D_h} = \dfrac{1}{\tan \hat{V}}$ et $f'_{\hat{V}} = \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}$

donc $\sigma^2_{DN_i} = \left(\sigma_{D_h} \times \dfrac{1}{\tan \hat{V}}\right)^2 + \left(\sigma_{\hat{V}} \times \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}\right)^2$.

En pratique, $\sigma_{D_h} \times \dfrac{1}{\tan \hat{V}}$ est considéré comme négligeable et on remplace $\sigma_{\hat{V}}$ par $\tan \sigma_{\hat{V}}$ pour éviter la conversion grades vers radians.

Donc $\sigma^2_{DN_i} \simeq \left(\tan \sigma_{\hat{V}} \times \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}\right)^2$

$$\sigma_{DN_i}^2 = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

$f'_{D_h} = \dfrac{1}{\tan \hat{V}}$ et $f'_{\hat{V}} = \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}$

donc $\sigma_{DN_i}^2 = \left(\sigma_{D_h} \times \dfrac{1}{\tan \hat{V}}\right)^2 + \left(\sigma_{\hat{V}} \times \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}\right)^2.$

En pratique, $\sigma_{D_h} \times \dfrac{1}{\tan \hat{V}}$ est considéré comme négligeable et on remplace $\sigma_{\hat{V}}$ par $\tan \sigma_{\hat{V}}$ pour éviter la conversion grades vers radians.

Donc $\sigma_{DN_i}^2 \simeq \left(\tan \sigma_{\hat{V}} \times \dfrac{-D_h}{\sin^2 \hat{V}}\right)^2$

d'où $\sigma_{DN_i} \simeq \dfrac{-D_h \tan \sigma_{\hat{V}}}{\sin^2 \hat{V}}.$

Quelques règles utiles

$$\mathsf{d}(u+v)=\mathsf{d}u+\mathsf{d}v$$

Quelques règles utiles

$$\mathsf{d}(u+v) = \mathsf{d}u + \mathsf{d}v$$

$$\mathsf{d}(k \times u) = k \times \mathsf{d}u$$

Quelques règles utiles

$$\mathsf{d}(u+v)=\mathsf{d}u+\mathsf{d}v$$

$$\mathsf{d}(k\times u)=k\times\mathsf{d}u$$

$$\mathsf{d}(u\times v)=\mathsf{d}u\times v+\mathsf{d}v\times u$$

Quelques règles utiles

$$\mathsf{d}(u+v) = \mathsf{d}u + \mathsf{d}v$$

$$\mathsf{d}(k \times u) = k \times \mathsf{d}u$$

$$\mathsf{d}(u \times v) = \mathsf{d}u \times v + \mathsf{d}v \times u$$

$$\mathsf{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\mathsf{d}u \times v - \mathsf{d}v \times u}{v^2}$$

Quelques règles utiles

$$\mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}(k \times u) = k \times \mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}(u \times v) = \mathrm{d}u \times v + \mathrm{d}v \times u$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\mathrm{d}u \times v - \mathrm{d}v \times u}{v^2}$$

Si la fonction ne se présente pas sous une de ces quatre formes, on se servira des formules générales
$\mathrm{d}f = (f'_x \times \mathrm{d}x)^2 + \left(f'_y \times \mathrm{d}y\right)^2 + \ldots$ et
$\sigma_f^2 = (f'_x \times \sigma_x)^2 + \left(f'_y \times \sigma_y\right)^2 + \ldots$.

$$\sigma_{DN_i}^2 = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

$DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$

donc

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

$DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$

donc

$$\mathrm{d}DN_i = \frac{\mathrm{d}D_h \times \tan \hat{V} - \mathrm{d}(\tan \hat{V}) \times D_h}{(\tan \hat{V})^2}$$

$$\sigma_{DN_i}^2 = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

$DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$

donc

$$\mathrm{d}DN_i = \frac{\mathrm{d}D_h \times \tan \hat{V} - \mathrm{d}(\tan \hat{V}) \times D_h}{(\tan \hat{V})^2}$$

or $\mathrm{d}(\tan \hat{V}) = (\tan)'\hat{V} \times \mathrm{d}\hat{V} = \dfrac{1}{\cos^2 \hat{V}} \times \mathrm{d}\hat{V}$

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

$DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$

donc

$$\mathrm{d}DN_i = \frac{\mathrm{d}D_h \times \tan \hat{V} - \mathrm{d}(\tan \hat{V}) \times D_h}{(\tan \hat{V})^2}$$

or $\mathrm{d}(\tan \hat{V}) = (\tan)'\hat{V} \times \mathrm{d}\hat{V} = \dfrac{1}{\cos^2 \hat{V}} \times \mathrm{d}\hat{V}$

d'où

$$\sigma^2_{DN_i} = \left(f'_{D_h} \times \sigma_{D_h}\right)^2 + \left(f'_{\hat{V}} \times \sigma_{\hat{V}}\right)^2$$

Exemple 4

$DN_i = \dfrac{D_h}{\tan \hat{V}}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$

donc

$$\mathrm{d}DN_i = \frac{\mathrm{d}D_h \times \tan \hat{V} - \mathrm{d}(\tan \hat{V}) \times D_h}{(\tan \hat{V})^2}$$

or $\mathrm{d}(\tan \hat{V}) = (\tan)'\hat{V} \times \mathrm{d}\hat{V} = \dfrac{1}{\cos^2 \hat{V}} \times \mathrm{d}\hat{V}$

d'où

$$\mathrm{d}DN_i = \frac{\mathrm{d}D_h \times \tan \hat{V} - \frac{1}{\cos^2 \hat{V}} \times \mathrm{d}\hat{V} \times D_h}{(\tan \hat{V})^2}, \text{ etc.}$$

Supplément

Exemple 5

Le rayon d'une boule augmente de 2 %.
Quel est l'augmentation relative (approximative) du volume de la boule ?

Supplément

Exemple 5

Le rayon d'une boule augmente de 2 %.
Quel est l'augmentation relative (approximative) du volume de la boule ?

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Supplément

Exemple 5

Le rayon d'une boule augmente de 2 %.
Quel est l'augmentation relative (approximative) du volume de la boule ?

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ donc $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} = 4\pi R^2$

Supplément

Exemple 5

Le rayon d'une boule augmente de 2 %.
Quel est l'augmentation relative (approximative) du volume de la boule ?
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ donc $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} = 4\pi R^2$
d'où

Supplément

Exemple 5

Le rayon d'une boule augmente de 2 %.
Quel est l'augmentation relative (approximative) du volume de la boule ?

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ donc $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} = 4\pi R^2$

d'où $\mathrm{d}V = 4\pi R^2 \mathrm{d}R$.

Supplément

Exemple 5

Le rayon d'une boule augmente de 2 %.
Quel est l'augmentation relative (approximative) du volume de la boule ?
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ donc $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} = 4\pi R^2$
d'où $\mathrm{d}V = 4\pi R^2 \mathrm{d}R$.

L'augmentation relative est donc

Supplément

Exemple 5

Le rayon d'une boule augmente de 2 %.
Quel est l'augmentation relative (approximative) du volume de la boule ?
$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ donc $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} = 4\pi R^2$
d'où $\mathrm{d}V = 4\pi R^2 \mathrm{d}R$.
L'augmentation relative est donc $\dfrac{\mathrm{d}V}{V} = \dfrac{4\pi R^2 \mathrm{d}R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3\dfrac{\mathrm{d}R}{R}$

Supplément

Exemple 5

Le rayon d'une boule augmente de 2 %.
Quel est l'augmentation relative (approximative) du volume de la boule ?

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ donc $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} = 4\pi R^2$

d'où $\mathrm{d}V = 4\pi R^2 \mathrm{d}R$.

L'augmentation relative est donc $\dfrac{\mathrm{d}V}{V} = \dfrac{4\pi R^2 \mathrm{d}R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3\dfrac{\mathrm{d}R}{R}$

ce qui donne 6 % d'augmentation environ (valeur exacte : 7651/1250 soit 6,1208 %).