le cnam
École supérieure des géomètres et topographes esgt

Concours d'entrée TS et TS'

Session 2016

Épreuve de mathématiques

Durée : 3 heures

Calculatrice personnelle autorisée ; sans document

Ce devoir comporte trois exercices entièrement indépendants que vous pouvez aborder dans n'importe quel ordre. Vous veillerez à indiquer clairement le numéro de chaque exercice que vous traiterez et à respecter la numérotation des questions proposée par l'énoncé. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées et les calculs expliqués par au moins une phrase. La présentation sera prise en compte dans l'appréciation finale de la copie. Il n'est pas nécessaire de traiter l'ensemble des questions du sujet pour obtenir une bonne note.

Exercice 1 - *Résolution d'une équation du troisième degré*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Cet exercice est consacré à l'étude de l'équation du troisième degré $f(x) = 0$.

1. Déterminer la dérivée première f' de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
3. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ en précisant les limites aux bornes.
4. Calculer numériquement $f(1)$, $f(1,25)$, $f(1,3)$, $f(1,4)$, $f(1,5)$, $f(1,75)$, $f(2)$.
5. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[1,2]$ **seulement**.

   On prendra $\left\|\vec{i}\right\| = 10$ cm et $\left\|\vec{j}\right\| = 1$ cm.

   On tracera soigneusement les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses 1 et 2 respectivement.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle positive que l'on notera α.
7. Montrer que $\alpha \in]1,3\,;1,4[$. En déduire une valeur approchée de α à 10^{-1} près
8. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $I = [1, 2]$ par :

   $$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

   Montrer que si $\left(x_0, f(x_0)\right)$ est un point M_0 quelconque de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x_0 \in I$, alors le point $(x_1 = h(x_0), 0))$ est à l'intersection de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en M_0 avec l'axe des abscisses.

   Placer le point $(x_1, 0)$ sur la figure de la question 5 dans le cas où $x_0 = 2$.

9. Comment obtient-on, par une méthode graphique, le point $(h(x_1), 0)$? Que représente alors les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = h(x_n)$.
10. Une étude fine des variations de la fonction h permet d'établir que, pour tout $x \in I$:

$$0 \leq |h(x) - h(\alpha)| \leq \left(\frac{16}{17}\right)^2 |x - \alpha|.$$

Vérifier que $h(\alpha) = \alpha$ et utiliser l'inégalité précédente pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{16}{17}\right)^{2n} |x_0 - \alpha| \leq \left(\frac{16}{17}\right)^{2n}.$$

11. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α et déterminer un nombre entier N tel que $|x_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ dès que $n \geq N$.
12. Donner alors une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 2 - *Propriétés des isobarycentres*

Dans l'espace affine euclidien usuel de dimension 3, on considère 4 points O, A_1, A_2 et A_3 tels que $\left(O, \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}\right)$ soit un repère orthonormé direct. Soient G_2 le milieu du segment $[A_1\,A_2]$ et G_3, l'isobarycentre des points A_1, A_2 et A_3.

1. Sur une figure, représenter les points O, A_1, A_2, A_3, G_2 et G_3.
2. Montrer que le triangle $A_1\,A_2\,A_3$ est équilatéral.
3. Calculer les coordonnées des points G_2 et G_3.
4. Calculer les longueurs $G_2\,A_1$, $G_2\,A_2$, $G_3\,A_1$, $G_3\,A_2$, $G_3\,A_3$ et $G_3\,G_2$.
5. Vérifier que $G_3\,A_1{}^2 + G_3\,A_2{}^2 = 2\,G_3\,G_2{}^2 + G_2\,A_1{}^2 + G_2\,A_2{}^2$.
6. En déduire que : $G_3\,A_1{}^2 + G_3\,A_2{}^2 + G_3\,A_3{}^2 = 6\,G_3\,G_2{}^2 + G_2\,A_1{}^2 + G_2\,A_2{}^2$.
7. On considère à présent n points A_1, A_2, …, A_n où n est un entier supérieur ou égal à 3 et on note G_k l'isobarycentre des points A_1, A_2, …, A_k pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

   Développer, pour tout entier p, $1 \leq p \leq n-1$, l'expression suivante :

$$\sum_{k=1}^{p} G_{p+1}\,A_k{}^2 = \sum_{k=1}^{p} \left(\overrightarrow{G_{p+1}\,G_p} + \overrightarrow{G_p\,A_k}\right)^2.$$

8. En déduire la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{p} G_{p+1}\,A_k{}^2 = p\,G_{p+1}\,G_p{}^2 + \sum_{k=1}^{p} G_p\,A_k{}^2, \quad \text{pour} \quad 1 \leq p \leq n-1. \tag{1}$$

9. Donner la relation très simple qui lie les vecteurs $\overrightarrow{G_{p+1}\,G_p}$ et $\overrightarrow{G_{p+1}\,A_{p+1}}$.
10. En utilisant la relation 1, montrer alors la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{p+1} G_{p+1}\,A_k{}^2 = \left(p^2 + p\right) G_{p+1}\,G_p{}^2 + \sum_{k=1}^{p} G_p\,A_k{}^2, \quad \text{pour} \quad 1 \leq p \leq n-1. \tag{2}$$

11. Les relations 1 et 2 sont-elles compatibles avec les résultats des questions 5 et 6 ?

Exercice 3 - *Recherche du plus proche voisin*

L'espace affine euclidien $\mathscr{E}$ usuel est rapporté au repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$ et M un point quelconque dont les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ sont (x, y, z). Soit F l'application qui, à tout point M de $\mathscr{E}$, associe le réel positif $F(M)$ défini par :

$$F(M) = F(x, y, z) = OM + AM + BM + CM,$$

où $SM = \left\| \overrightarrow{SM} \right\|$ pour $S = O, A, B, C$.

1. Représenter sur une figure, le repère $\mathscr{R}$ ainsi que les points A, B et C.
2. Calculer $F(O)$, $F(A)$, $F(B)$ et $F(C)$. Que constatez-vous ?
3. On admet que, lorsque M décrit l'espace entier, F admet un minimum global, noté m.

   Montrer que $0 \leq m \leq 3$.
4. On considère l'application g de l'espace $\mathscr{E}$ dans lui-même qui, à tout point $M(x, y, z)$, associe le point $M'(y, z, x)$.

   Déterminer $g(O)$, $g(A)$, $g(B)$ et $g(C)$.
5. Montrer que pour tout couple de points (M, N) de $\mathscr{E}$: $\left\| \overrightarrow{g(M)g(N)} \right\| = \left\| \overrightarrow{MN} \right\|$.

   Comment appelle-t-on une application qui vérifie cette propriété ?

   Indication : déterminer au préalable l'expression des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{g(M)g(N)}$.
6. Montrer que : $F(M) = F\left(g(M)\right)$ pour tout point M de $\mathscr{E}$.
7. Soit D la droite passant par O dont un vecteur-directeur est $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Soit P un point quelconque qui n'appartient pas à la droite D. On pose $P' = g(P)$, $P'' = g(P') = g\left(g(P)\right)$. Soit Q l'isobarycentre des points P, P' et P''.

   Soient (x_P, y_P, z_P) les coordonnées de P. Déterminer les coordonnées du point Q en fonction de celles de P et montrer que $Q \in D$.
8. Justifier l'inégalité $MQ \leq \dfrac{1}{3}\left(MP + MP' + MP''\right)$ pour tout point M de $\mathscr{E}$.
9. En déduire que $F(Q) - OQ \leq F(P) - OP$.
10. Montrer $\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{QP} = 0$.

    Indication : utiliser les résultats de la question 7.
11. Développer l'expression $OP^2 = \left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}\right)^2$ et en déduire que $OP < OQ$ pour tout P n'appartenant pas à la droite D.
12. Déduire des questions 9 et 11, l'inégalité $F(Q) < F(P)$. Dans quel cas particulier a-t-on $F(P) = F(Q)$?
13. On suppose que le minimum m de F est atteint en un point P_m. Où se situe nécessairement le point P_m ?
14. On considère à présent un point P de la droite D tel que : $\overrightarrow{OP} = x\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

    Montrer que, pour tout $x \leq 0$, $F(P) \geq F(O)$. En déduire que le point P_m a nécessairement une abscisse strictement positive.
15. Montrer que la fonction F calculée en P peut s'écrire :

$$F(P) = f(x) = x\sqrt{3} + 3\sqrt{(x-1)^2 + 2x^2} \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

16. Calculer f' et vérifier que $f'(1/6) = 0$. On admettra que $1/6$ est le seul réel pour lequel $f'(x)$ s'annule sur $\mathbb{R}_*^+$.
17. Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$ et montrer qu'elle atteint un minimum en $x_m = 1/6$.
18. En déduire la position du point P_m et calculer la valeur du minimum m.

Fin de l'épreuve