Concours d'entrée TS et TS'

Session 2015

Épreuve de mathématiques

Durée : 3 heures

Calculatrice personnelle autorisée ; sans document

Ce devoir comporte deux exercices et un problème entièrement indépendants que vous pouvez aborder dans n'importe quel ordre. Vous veillerez à indiquer clairement le numéro de chaque exercice ou problème que vous traiterez et à respecter la numérotation des questions proposée par l'énoncé. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées et les calculs expliqués par au moins une phrase. La présentation sera prise en compte dans l'appréciation finale de la copie. Il n'est pas nécessaire de traiter l'ensemble des questions du sujet pour obtenir une bonne note.

Exercice 1 - *Le théorème de Newton*

Sur la figure 1 ci-après, les points I, J et K désignent les milieux respectifs des segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$.

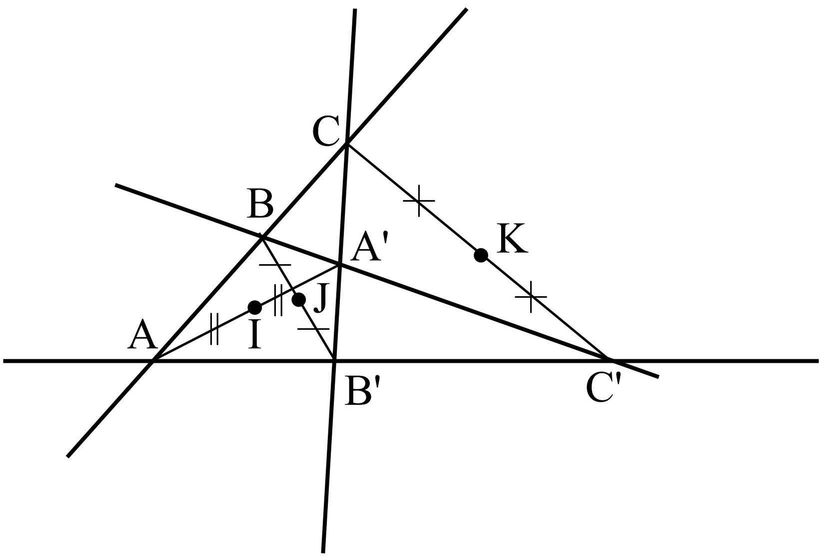

FIGURE 1 – Figure du théorème de Newton.

Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'}\right) \wedge \overrightarrow{MB} + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'}\right) \wedge \overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{0}. \quad (1)$$

1. Montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB'} = 2\overrightarrow{MJ}$, pour tout point M du plan.
2. En déduire, à partir de la relation 1, que tout point M de l'ensemble $\mathscr{D}$ vérifie la relation :

$$\overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{0}.$$

3. Montrer que tous les points de $\mathscr{D}$ appartiennent à la droite (IJ).
4. Réciproquement, montrer que tout point P de la droite (IJ) appartient à l'ensemble $\mathscr{D}$; en déduire que $\mathscr{D} = (IJ)$.
5. En introduisant le points C et C', démontrer les quatre égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{KA} \wedge \overrightarrow{KB} & = & \overrightarrow{KC} \wedge \overrightarrow{AB}; \\ \overrightarrow{KA'} \wedge \overrightarrow{KB'} & = & \overrightarrow{KC} \wedge \overrightarrow{A'B'}; \\ \overrightarrow{KA} \wedge \overrightarrow{KB'} & = & -\overrightarrow{KC} \wedge \overrightarrow{AB'}; \\ \overrightarrow{KA'} \wedge \overrightarrow{KB} & = & -\overrightarrow{KC} \wedge \overrightarrow{A'B}. \end{array}$$

6. En déduire que le point K appartient à $\mathscr{D}$ et que, par conséquent, les points I, J et K sont alignés ; Ce résultat constitue le *théorème de Newton.*

Exercice 2 - *Approximation du réel* $\sqrt{2}$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

1. Vérifier que $f(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1$ et justifier la double inégalité $0 < \sqrt{2}-1 < 1$.
2. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur I. On précisera en particulier, les valeurs prises par le fonction et sa dérivée aux bornes 0 et 1 de l'intervalle I.
3. Tracer la courbe représentative de f sur I dans un repère orthonormé (unité : 10 cm). On tracera soigneusement les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses 0, 1/2 et 1.
4. On considère la suite réelle (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 0$ et, pour tout entier n strictement positif, par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Calculer les termes u_n pour les valeurs de n égales à 1, 2, 3, 4, et 5.
5. Sur la représentation graphique réalisée à la question 3, marquer sur l'axe des abscisses, les points u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. On s'aidera de la droite d'équation $y = x$.
6. Montrer par récurrence que tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle I.
7. En remarquant que :

$$\left|u_{n+1} - (\sqrt{2}-1)\right| = \left|\frac{1}{2+u_n} - \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}\right|,$$

   montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|u_{n+1} - (\sqrt{2}-1)\right| = \frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+u_n)}\left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right|.$$

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leq (1+\sqrt{2})(2+u_n)$; en déduire l'inégalité :

$$\left|u_{n+1} - (\sqrt{2}-1)\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right|.$$

9. Justifier la suite d'inégalités ci-après :

$$\left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_{n-1} - (\sqrt{2}-1)\right| \leq \frac{1}{4^2}\left|u_{n-2} - (\sqrt{2}-1)\right| \leq \ldots \leq \frac{1}{4^n}\left|u_0 - (\sqrt{2}-1)\right| ;$$

en déduire que : $\left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right| \leq \dfrac{1}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

11. À partir des résultats précédents, déterminer une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

Problème - *Le théorème d'Archimède*

Dans tout le problème, l'espace euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soit M un point quelconque de l'espace. On rappelle que les *coordonnées cartésiennes* du point M dans le repère précédemment défini est l'unique triplet de réels (X, Y, Z) tel que :

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

Soit S l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées cartésiennes s'expriment grâce aux trois relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & \cos\varphi\cos\theta \\ Y & = & \cos\varphi\sin\theta \\ Z & = & \sin\varphi \end{array}\right. ,$$

dans lequelles θ et φ sont deux angles appartenant respectivement aux intervalles ouverts $]0, 2\pi[$ et $]-\pi/2, \pi/2[$.

Partie A - *Repérage sur la sphère unité*

1. Montrer que l'ensemble S contient tous les points situés sur la sphère de centre O, de rayon 1, à l'exclusion d'un demi-cercle tracé sur la sphère que l'on précisera.
2. Comment appelle-t-on usuellement les angles θ et φ et le couple (θ, φ) ?
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points de S dont les coordonnées (θ, φ) *en radians* sont données ci-après : $(\pi/2, 0)$, $(\pi, 0)$, $(3\pi/2, 0)$, $(\pi/4, \pi/4)$, $(5\pi/4, -\pi/4)$.
4. Déterminer réciproquement les coordonnées d'un point de S de coordonnées cartésiennes $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}, \dfrac{\sqrt{6}}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$.

   On exprimera le résultat à l'aide du nombre π.

Soient les coordonnées (θ_0, φ_0) d'un point fixé de S quelconque. On appelle $\mathscr{M}(\theta_0)$ et $\mathscr{P}(\varphi_0)$ les courbes tracées sur la sphère S constituées respectivement des points de coordonnées (θ_0, φ), $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$ et (θ, φ_0), $\theta \in]0, 2\pi[$.

Ainsi, la courbe $\mathscr{M}(\theta_0)$ admet-elle une représentation paramétrique définie pour $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X(\varphi) & = & \cos\varphi\cos\theta_0 \\ Y(\varphi) & = & \cos\varphi\sin\theta_0 \\ Z(\varphi) & = & \sin\varphi \end{array}\right. .$$

5. Soit P un point de la courbe $\mathscr{M}(\theta_0)$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OP}$ en fonction du vecteur $\vec{k}$ et du vecteur $\vec{u}_{\theta_0}$ défini par :
$$\vec{u}_{\theta_0} = \cos\theta_0\,\vec{i} + \sin\theta_0\,\vec{j}.$$
6. En déduire que la courbe $\mathscr{M}(\theta_0)$ est un cercle dans un plan que l'on précisera. Donner également le nom usuel d'une telle courbe.
7. Donner à présent une représentation paramétrique de la courbe $\mathscr{P}(\varphi_0)$.
8. En vous inspirant de la question 5, montrer que si R est un point de la courbe $\mathscr{P}(\varphi_0)$ alors le vecteur $\overrightarrow{OR}$ peut s'exprimer par :
$$\overrightarrow{OR} = \cos\varphi_0\left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right) + \overrightarrow{K}_{\varphi_0},$$
où $\overrightarrow{K}_{\varphi_0}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{k}$ dont on précisera l'expression.
9. En déduire la nature de la courbe $\mathscr{P}(\varphi_0)$ et préciser la plan qui la contient. Donner également le nom usuel d'une telle courbe.

Soit $\overrightarrow{T}_m(\theta_0, \varphi)$ le vecteur défini par :
$$\overrightarrow{T}_m(\theta_0, \varphi) = \frac{d\overrightarrow{OP}}{d\varphi} = X'(\varphi)\,\vec{i} + Y'(\varphi)\,\vec{j} + Z'(\varphi)\,\vec{k},$$
où $X'(\varphi)$, $Y'(\varphi)$ et $Z'(\varphi)$ désignent les dérivées premières des fonctions $X(\varphi)$, $Y(\varphi)$ et $Z(\varphi)$ respectivement.

10. Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{T}_m(\theta_0, \varphi)$ en fonction de θ_0 et φ et calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{T}_m(\theta_0, \varphi)$.
11. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{T}_m(\theta_0, \varphi)$ est tangent à la courbe $\mathscr{M}(\theta_0)$ au point P de coordonnées (θ_0, φ).
12. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{T}_p(\theta, \varphi_0)$ de coordonnées cartésiennes $\begin{bmatrix} -\cos\varphi_0\sin\theta \\ \cos\varphi_0\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$ est tangent à la courbe $\mathscr{P}(\varphi_0)$ au point R, de coordonnées (θ, φ_0).
13. Représenter sur la figure 3 en annexe **à rendre avec la copie**, les vecteurs $\overrightarrow{T}_m(\theta_0, \varphi_0)$ et $\overrightarrow{T}_p(\theta_0, \varphi_0)$ au point M_0 de coordonnées (θ_0, φ_0), que l'on indiquera sur la figure.
14. Exprimer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{T}_p(\theta_0, \varphi_0) \wedge \overrightarrow{T}_m(\theta_0, \varphi_0)$ et montrer que ce dernier est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM_0}$.

Partie B - *Projection de la sphère sur un cylindre tangent*

Les définitions et notations de la partie A seront conservées dans cette partie.

On considère l'application p_m qui à tout point M appartenant à S de coordonnées (θ, φ) associe le point M_c de coordonnées cartésiennes $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{OM_c}$ peut s'écrire $\overrightarrow{OM_c} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM_c}$ où m est un point du cercle équatorial de la sphère S et $\overrightarrow{mM_c}$ un vecteur colinéaire à $\vec{k}$
2. En déduire que l'application p_m transforme tout point de S en un point du cylindre C tangent à la sphère dont l'axe est de même direction que celle du vecteur $\vec{k}$.
3. L'ensemble S ne contient pas les pôles de par sa définition. Pourquoi la transformation p_m ne peut-elle s'appliquer en ces deux points ?
4. Les vecteurs $\overrightarrow{T}_g(\theta,\varphi)$ de coordonnées cartésiennes $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{T}_s(\theta,\varphi)$ de coordonnées cartésiennes $\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$ sont respectivement tangents à deux courbes tracées sur le cylindre C qui se croisent au point M_c ; lesquelles ?

   Représenter ces deux vecteurs sur la figure 4 en annexe **à rendre avec la copie**.
5. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{T}_s(\theta,\varphi) \wedge \overrightarrow{T}_g(\theta,\varphi)$ et préciser sa direction par rapport au cylindre.

On considère à présent la sous-ensemble de S, appelé *lune*, constitué des points de coordonnées (θ,φ) tels que :

$$\theta_1 < \theta < \theta_2 \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$$

où θ_1 et θ_2 sont deux réels fixés de l'intervalle $]0, 2\pi[$.

6. Représenter schématiquement une lune la sphère S en indiquant également les angles θ_1 et θ_2.
7. Que devient la lune définie précédemment une fois projetée sur le cylindre C à l'aide de l'application p_m ? Illustrer votre réponse par un schéma.
8. Soient $\mathscr{A}$ l'aire de la lune et $\mathscr{A}_c$ celle de sa projection sur le cylindre C. Ces deux aires peuvent être évaluées à l'aide des calculs d'intégrales suivants :

$$\mathscr{A} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\theta)\,d\theta \quad \text{avec} \quad F(\theta) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\| \overrightarrow{T}_p(\theta,\varphi) \wedge \overrightarrow{T}_m(\theta,\varphi) \right\| d\varphi,$$

$$\mathscr{A}_c = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_c(\theta)\,d\theta \quad \text{avec} \quad F_c(\theta) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\| \overrightarrow{T}_s(\theta,\varphi) \wedge \overrightarrow{T}_g(\theta,\varphi) \right\| d\varphi.$$

   Montrer alors que $\mathscr{A} = \mathscr{A}_c$. Ce résultat constitue le *théorème d'Archimède*.

   Plus généralement, la transformation p_m définie dans le problème conserve les aires lors de la projection de la sphère sur le cylindre tangent.
9. Sans calculer d'intégrale, exprimer l'aire $\mathscr{A}$ en fonction de θ_1 et θ_2 et vérifier la relation obtenue en calculant l'aire de la sphère unité.

Partie C - *Un théorème de trigonométrie sphérique*

Cette dernière partie se propose d'utiliser le théorème d'Archimède pour démontrer le théorème de trigonométrie sphérique suivant :

> *Soit ABC un triangle tracé sur une sphère unité dont les côtés coïncident avec des arcs de grands cercles. Alors, l'aire de ce triangle est égale à la somme :*
>
> $$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi,$$
>
> *où $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont les mesures des angles formés par le triangles aux sommets A, B et C respectivement.*

On considère trois grands cercles tracés sur la sphère comme indiqué sur la figure 2. L'aire d'un triangle sphérique quelconque ABC sera notée $\mathscr{A}(ABC)$.

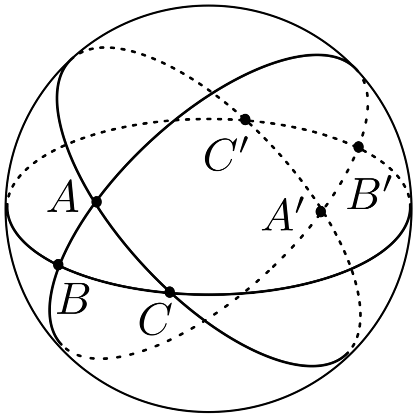

FIGURE 2 – Théorème de trigonométrie sphérique.

1. Démontrer les trois égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(ABC) + \mathscr{A}\left(A'BC\right) &= 2\hat{A}, \\ \mathscr{A}(ABC) + \mathscr{A}\left(AB'C\right) &= 2\hat{B}, \\ \mathscr{A}(ABC) + \mathscr{A}\left(ABC'\right) &= 2\hat{C}. \end{aligned}$$

2. En déduire la relation :

$$2\mathscr{A}(ABC) + \left(\mathscr{A}(ABC) + \mathscr{A}\left(A'BC\right) + \mathscr{A}\left(AB'C\right) + \mathscr{A}\left(ABC'\right)\right) = 2\hat{A} + 2\hat{B} + 2\hat{C}.$$

3. Montrer que :

$$\mathscr{A}(ABC) + \mathscr{A}\left(AB'C\right) + \mathscr{A}\left(AB'C'\right) + \mathscr{A}\left(ABC'\right) = 2\pi.$$

4. Justifier l'égalité : $\mathscr{A}\left(A'BC\right) = \mathscr{A}\left(AB'C'\right)$.

5. Conclure sur la validité du théorème de trigonométrie sphérique énoncé dans cette partie.

Fin de l'épreuve

Annexe à rendre avec la copie

n° : ....

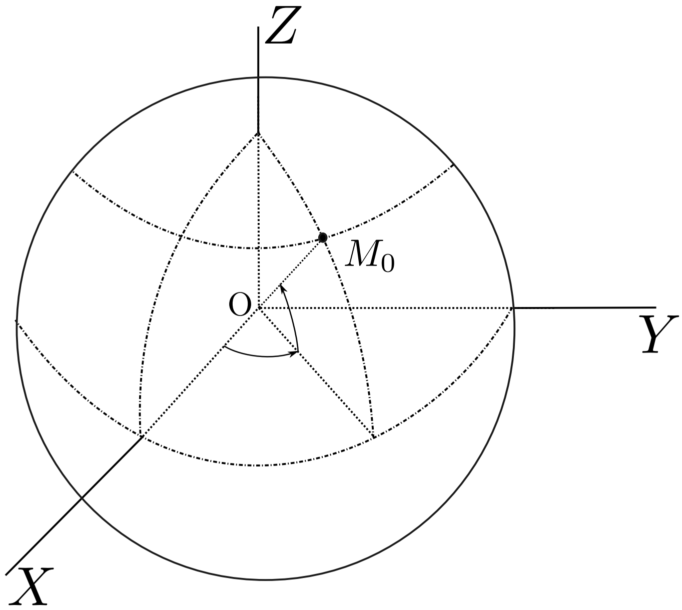

FIGURE 3 – Repérage sur la sphère unité.

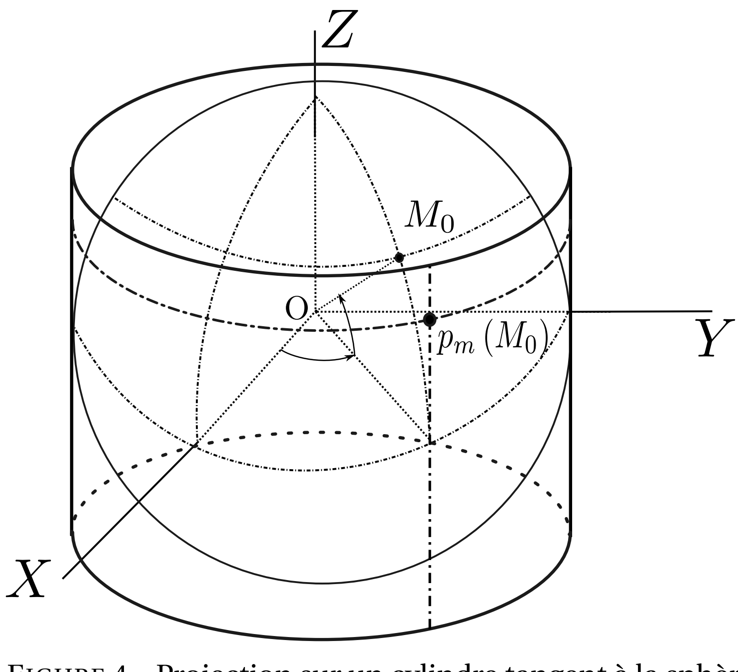

FIGURE 4 – Projection sur un cylindre tangent à la sphère.