Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS
ÉCOLE SUPÉRIEURE DES GÉOMÈTRES ET TOPOGRAPHES

CONCOURS D'ENTRÉE

TS et TS'

Session 2014

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures – Coefficient : 2

Documents Interdits

Calculatrice fournie par l'ESGT uniquement.

Le sujet comporte 5 pages.

le cnam
esgt
École supérieure des géomètres et topographes

Concours d'entrée TS et TS'

Session 2014

Épreuve de mathématiques

Durée : 3 heures

Calculatrice ESGT ; sans document

Ce devoir comporte trois problèmes entièrement indépendants que vous pouvez aborder dans n'importe quel ordre. Vous veillerez à indiquer clairement le numéro de chaque problème que vous traiterez et à respecter la numérotation des questions proposée par l'énoncé. Toutes les réponses proposées devront être soigneusement justifiées et les calculs expliqués par au moins une phrase. La présentation sera prise en compte dans l'appréciation finale de la copie.

Problème 1 - *Approximation de la fonction cosinus*

Dans tout le problème, les représentation graphiques seront réalisées dans le plan affine euclidien muni du repère othonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit f la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Le théorème des valeurs intermédiaires énoncé ci-après pourra être utilisé sans démonstration.

> *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.*
>
> *Alors il existe un réel c dans l'intervalle I tel que $f(c) = \lambda$.*

Partie A - *Encadrement de la fonction f*

1. Montrer que f est périodique, de période égale à 2.
2. Montrer que f est paire. Exprimer littéralement $f(1-x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.
3. Donner les éléments de symétrie de la courbe représentative de la fonction f pour $x \in [-1, +1]$.
4. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle I en faisant figurer les tangentes aux bornes.

La fonction f sera dorénavant étudiée sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Soient g et h les fonctions numériques définies sur I par :

$$g(x) = 1 - 4x^2 - \cos(\pi x) \quad \text{et} \quad h(x) = 1 - 6x^2 + 4x^3 - \cos(\pi x).$$

5. Pourquoi les fonctions g et h sont-elles indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$?

6. Calculer g' et g'' ainsi que h', h'' et h'''.
7. Montrer qu'il existe un réel $x_1 \in I$ tel que $g''(x_1) = 0$. Dresser alors le tableau des variations de la fonction g' sur I.
8. Montrer qu'il existe un réel x_2 dans l'intervalle $\left[x_1, \frac{1}{2}\right]$ tel que $g'(x_2) = 0$. Dresser alors le tableau des variations de la fonction g sur l'intervalle I.
9. En déduire que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq 1 - 4x^2$.
10. En suivant une démarche analogue à celle utilisée pour g, dresser le tableau comprenant successivement les variations des fonctions h''', h'', h' et h sur l'intervalle I. On notera x_4, x_5 et x_6, les réels de l'intervalle I tels que :

$$h'''(x_3) = 0,\ h''(x_4) = 0, \quad \text{et} \quad h'(x_5) = 0.$$

On admettra que $x_4 \leq x_5 < x_3$.

En déduire que pour tout $x \in I$, $1 - 6x^2 + 4x^3 \leq f(x)$.

Soient les deux polynômes P et Q définis respectivement par :

$$P(x) = -4x^2 + 1 \quad \text{et} \quad Q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1.$$

11. Montrer que pour tout $x \in I$,

$$\left| f(x) - \frac{1}{2}[P(x) + Q(x)] \right| \leq \frac{1}{2}[P(x) - Q(x)].$$

12. Pour x fixé dans I, la quantité $\frac{1}{2}[P(x) + Q(x)]$ constitue une valeur approchée de $f(x)$; que représente alors la fonction $e(x) = \frac{1}{2}[P(x) - Q(x)]$?
13. Exprimer littéralement la fonction $e(x)$ en fonction de x et étudier ses variations sur I. Tracer la courbe représentative de la fonction e sur I avec $\|\vec{i}\| = 24\,\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 54\,\text{cm}$.
14. Pour quelle valeur de x l'approximation de $f(x)$ par $\frac{1}{2}[P(x) + Q(x)]$ est-elle la plus grossière ? Donner alors la valeur de l'écart entre $f(x)$ et sa valeur approchée.

Partie B - *Étude de l'équation $f(x) = \pi x$*

Dans cette partie, f désignera la fonction définie dans la partie A. Soit r la fonction $x \mapsto \cos(x)$ définie sur l'intervalle $J = [0, 1]$.

1. En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto x - \cos(x)$ sur J, montrer qu'il existe un réel l unique appartenant à J tel que $r(x) = x$. Le réel l est un **point fixe** de la fonction r.
2. Montrer que pour tout couple de réels x et y appartenant à J :

$$\left|\cos(x) - \cos(y)\right| \leq \sin(1)|x - y|.$$

On pourra utiliser la relation trigonométrique :

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

ainsi que l'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ u_{n+1} = r(u_n) \end{cases}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \sin(1)\,|u_n - u_{n-1}|.$$

En déduire alors que

$$|u_{n+1} - u_n| \leq (\sin(1))^n\,|u_1 - u_0|.$$

5. On pose $k = \sin(1)$. Montrer que quels que soient les entiers n et p,

$$\left|u_{n+p} - u_n\right| \leq k^n\left[1 + k + k^2 + \ldots + k^{p-1}\right]|u_1 - u_0|.$$

En déduire l'inégalité : $\left|u_{n+p} - u_n\right| \leq k^n \dfrac{1-k^p}{1-k}|u_1 - u_0|$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

On pourra utiliser la relation valable pour tout réel k différent de 1 :

$$1 + k + k^2 + \ldots + k^{p-1} = \frac{1-k^p}{1-k}.$$

6. Démontrer finalement l'inégalité : $|u_n - l| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$ pour $n \in \mathbb{N}$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite égale à l.

7. On donne $u_0 = \pi/4$. Déterminer l'entier n_0 tel que u_{n_0} constitue une valeur approchée de l au centième près.

8. On donne $u_{n_0} = 0,74$. À partir de cette valeur numérique, déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = \pi x$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{\pi}\right]$. Quelle incertitude a-t-on sur cette valeur approchée ?

9. Le résultat obtenu pour la solution de l'équation $f(x) = \pi x$ est-il compatible avec l'encadrement de la fonction f établi dans la partie A ?

Problème 2 - *Cercles et droites du plan affine euclidien*

Dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$, on appelle C le cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$. L'intérieur du cercle C est formé par l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $\Omega M < R$. L'extérieur du cercle rassemble quant à lui l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $\Omega M > R$.

Si A et B désignent deux points du plan $\mathscr{P}$, on note AB la longueur du segment $[AB]$.

1. Soit M un point du plan et soit une droite D passant par M qui recoupe le cercle C aux points A_1 et A_2. Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur la droite D.

Exprimer la quantité $\overline{MA_1}.\overline{MA_2}$ en fonction de MH^2 ; en déduire que cette dernière est égale à $\Omega M^2 - R^2$.

2. Pourquoi la quantité $\overline{MA_1}.\overline{MA_2}$ est-elle indépendante de la droite sécante D ? Cette dernière est appelée **puissance du point** M **par rapport au cercle** C que l'on désignera dorénavant par $p_C(M)$.

3. Discuter selon le signe de la puissance $p_C(M)$, la position du point M par rapport au cercle C.

4. Quelle est la puissance du centre d'un cercle par rapport à ce cercle ?
5. Soit D_T une droite passant par M et tangente au cercle C en un point T. Où ne doit pas se situer le point M pour qu'une telle droite existe ? Cette dernière est-elle unique ? Montrer que $p_C(M) = MT^2$.
6. Soient deux cercles C_1 et C_2 sécants en deux point A et B. Montrer que pour tout point M appartenant à la droite (AB) : $p_{C_1}(M) = p_{C_2}(M)$.
7. Réciproquement, soit M un point distinct de A tel que $p_{C_1}(M) = p_{C_2}(M)$. La droite (AM) recoupe les cercles C_1 et C_2 respectivement aux points B_1 et B_2. Que se passe-t-il lorsque la droite (AM) est tangente au cercle C_1 en A ? Montrer que : $\overline{MA}.\overline{MB_1} = \overline{MA}.\overline{MB_2}$. En déduire que $B_1 = B_2 = B$.
8. En utilisant les résultats des deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $p_{C_1}(M) = p_{C_2}(M)$.
9. On suppose à présent que les deux cercles C_1 et C_2 ne sont pas sécants. Soient Ω_1 et Ω_2 leurs centres respectifs et R_1 et R_2 leurs rayons respectifs. Montrer que si M est un point du plan tel que $p_{C_1}(M) = p_{C_2}(M)$ alors si I désigne le milieu di segment $[\Omega_1, \Omega_2]$:

$$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = \frac{1}{2}\left(R_1^2 - R_2^2\right).$$

10. Déterminer l'ensemble des point M tels que $p_{C_1}(M) = p_{C_2}(M)$ lorsque :

    a. les cercles C_1 et C_2 ne sont pas sécants, de centres et de rayons différents ;
    b. les cercles C_1 et C_2 ne sont pas sécants, de centres égaux et de rayons différents ;
    c. les cercles C_1 et C_2 sont confondus ;
    d. les cercles C_1 et C_2 sont tangents en A.

11. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit C le cercle d'équation cartésienne dans ce repère :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Déterminer la puissance du point O par rapport à ce cercle.

Problème 3 - *Pile ou face ?*

L'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie non nécessairement équilibrée, est modélisée de la façon suivante :
- l'événement A correspondant à l'obtention du côté « pile » est supposé de probabilité $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < 1$;
- l'événement contraire « obtenir le côté face » est donc de probabilité $1 - p$.

1. Soit X_0 la variable aléatoire définie sur l'univers de cette expérience qui prend la valeur 1 si l'événement A est réalisé, 0 sinon. Donner la loi de probabilité de X_0, autrement dit exprimer les probabilités $\mathbb{P}(X_0 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_0 = 1)$ en fonction de p. Cette loi de probabilité sera notée : $\mathscr{B}(1, p)$.
2. Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(X_0)$ et la variance $\mathbb{V}(X_0)$ de la variable aléatoire X_0 en fonction de p.
3. L'expérience précédente est répétée n fois dans les mêmes conditions expérimentales. Soit X_i la variable aléatoire donnant le résultat du i-ème lancer pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X_i ? Pourquoi les variables aléatoires X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sont-elles indépendantes ?

4. Soit la variable aléaoire $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pour $n \geq 1$. Que représente Y_n pour un nombre n de lancers donnés ? Quelles sont toutes les valeurs possibles de Y_n ?
5. Montrer que l'espérance mathématique de Y_n est donnée par : $\mathbb{E}(Y_n) = np$.
6. Montrer que la variance de Y_n est donnée par : $\mathbb{V}(Y_n) = np(1-p)$. On notera désormais $\mathscr{B}(n,p)$ la loi de Y_n (loi binomiale).

Indications :

- Si $X_1, \ldots, X_n$ est une famille de variables aléatoires :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$

- Si $X_1, \ldots, X_n$ est une famille de variables aléatoires **indépendantes** :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i).$$

7. Soit à présent la variable aléatoire $F_n = \dfrac{Y_n}{n}$. Que représente la variable aléatoire F_n ?
8. Déterminer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(F_n)$ et la variance $\mathbb{V}(F_n)$ de F_n. On rappelle que si X est une variable aléatoire et a un réel non nul alors $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Pour estimer la valeur de la probabilité p, on réalise un nombre n de lancers et on étudie la moyenne empirique F_n. Soit Π la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Le théorème de Moivre-Laplace stipule alors que si la loi de la variable aléatoire Y_n est la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ alors la probabilité que la variable aléatoire réduite $Z_n \dfrac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ soit comprise dans un intervalle $[a,b]$ donné tend vers $\Pi(b) - \Pi(a)$ lorsque n tend vers l'infini.

9. Soit ε un réel positif donné. Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(|F_n - p| \leq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|Z_n| \leq \varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right).$$

10. En déduire que :

$$\mathbb{P}\left(|F_n - p| \leq \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\Pi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1.$$

11. On admet que si $n > 1000$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$ alors :

$$2\Pi\left(\varepsilon\sqrt{4n}\right) - 1 - 0{,}01 < \mathbb{P}\left(|F_n - p| \leq \varepsilon\right) < 2\Pi\left(\varepsilon\sqrt{4n}\right) - 1 + 0{,}01.$$

Déterminer le nombre de lancers nécessaires pour obtenir p à 2,5% près avec un niveau de confiance supérieur à 0,95. On donne $\Pi(0{,}98) \approx 2{,}054$.

12. Dans quel intervalle doit se situer p pour que le calcul précédent soit valide ?

Fin de l'épreuve