Corrigé - ESGT 2013

Problème 1
Partie A

1. La fonction f est paire donc la connaissance des valeurs et variations de f sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ donne celles de f sur $]-\infty\,;\,0\,]$.
2. f est paire donc sa courbe est symétrique par-rapport à l'axe des ordonnées.
3. En utilisant $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$, on obtient :
$$f'(x) = \left(-\frac{x^2}{2}\right)'\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{2}\times 2x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$
Comme $\mathrm{e}^t > 0$ pour tout réel t et $-x < 0$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, on en déduit que f est strictement décroissante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^2}{2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{t\to-\infty}\mathrm{e}^t = 0$.
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Enfin, f est paire donc ses variations sur $]-\infty\,;\,0\,]$ sont inverses de celles sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

5. $f'(x) + xf(x) = -x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0$.
6. Donc $f'(x) = -xf(x)$. f' est le produit de deux fonctions u et v dérivables donc elle est dérivable. De plus, $u = -x$ donc $u' = -1$ et $v = f$ donc $v' = f'$ d'où $f''(x) = -1f(x) + (-x)f'(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - x\left(-x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) = (x^2-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2-1)f(x)$.
7. On cherche le signe de la dérivée de f', c'est-à-dire de f''. Or $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et f est positive sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ d'après le 4°) d'où :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1/2}$	$\nearrow$	0

Pour la limite en $+\infty$, remarquer que :
$$-x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}} = -\sqrt{2}\frac{t^{1/2}}{\mathrm{e}^t}$$ si on pose $t = \frac{x^2}{2}$.
La fraction est l'inverse de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t^\alpha}$ qui tend vers l'infini quand t tend vers l'infini (ce qui est le cas ici) donc cette fraction tend vers 0.
8. Si $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant 1$ alors $f'(a) \geqslant f'(x) \geqslant f'(b)$ car f' est décroissante sur $[\,0\,;\,1\,]$. L'I.A.F. nous dit alors que :
$f'(b)(x_2 - x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1) \leqslant f'(a)(x_2 - x_1)$ si $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b$
donc, en prenant $x_1 = a$ et $x_2 = b$, il vient
$f'(b)(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant f'(a)(b-a)$
Même raisonnement si $1 \leqslant a \leqslant b$, sauf que $f'(a) \leqslant f'(b)$ car f' est croissante sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$.
9. L'équation de la tangente T_a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ donc $t_a(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$.
10. Remarquons d'abord que $f(x) \leqslant t_a(x) \Longleftrightarrow f(x) - t_a(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) \leqslant 0 \Longleftrightarrow f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leqslant 0$
Si $x \leqslant a$ alors en remplaçant b par a et a par x dans le premier résultat du 8°), il vient : $f'(a)(a-x) \leqslant f(a) - f(x)$ donc
$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leqslant 0$.
Si $x \geqslant a$ alors en posant $b = x$ dans le premier résultat du 8°), il vient : $f(x) - f(a) \leqslant f'(a)(x-a)$ donc $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leqslant 0$.
Sur $[\,0\,;\,1\,]$, la courbe est en dessous de ses tangentes.

11. Raisonnement analogue, en utilisant la seconde paire d'inégalités du 8°).

    Sur $[1\,;\,+\infty[$, la courbe est au dessus de ses tangentes.

12. Ceci est un cas particulier de 10°) et de 11°), avec $a = 1$.

    La courbe est en dessous de sa tangente T_1 avant le point de contact et au dessus ensuite.

Partie B

1. Du fait de la symétrie de la courbe de f, on a :
   $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$

   donc $P(\,]-\infty\,;\,0]) = \dfrac{1}{2}P(\,]-\infty\,;\,+\infty]) = \dfrac{1}{2}$.

2. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\left(P(\,]-\infty\,;\,1]) - \frac{1}{2}\right)$

3. $\mathscr{A} \simeq \sqrt{2\pi} \times (0,8413 - 0,5) \simeq 0,856$.

Partie C

1. Comme $f' \leqslant 0$ (cf. Partie A.7°)), f est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc, si $\dfrac{k-1}{n} \leqslant t \leqslant \dfrac{k}{n}$ alors $f\left(\dfrac{k-1}{n}\right) \geqslant f(t) \geqslant f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

2. En intégrant l'inégalité du 1°) (en remarquant que les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens), on trouve :

   $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k-1}{n}\right)\mathrm{d}t$

   Mais $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ ne dépend pas de t donc

   $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t = f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 1\mathrm{d}t = f\left(\frac{k}{n}\right)[t]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

   et de même pour la borne de droite.

3. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t$ donc, d'après le 2°) :

   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \mathscr{A} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)$

   d'où

   $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$

   $\displaystyle u_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) + f\left(\frac{0}{n}\right) - f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$

   La borne de droite vaut :

   $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f(0) - \frac{1}{n} \times f(1) = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \times \mathrm{e}^{-1/2} = \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{n\sqrt{\mathrm{e}}}$

4. L'inégalité de droite provient de celle de gauche du 3°) et celle de gauche vient de celle de droite du 3°).

5. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathscr{A}$ (« théorème des gendarmes »).

6. Il suffit que $\dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) \leqslant 10^{-2}$ donc que

   $n \geqslant \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) \div 10^{-2} \simeq 39,3$ donc on prend $n = 40$.

Problème 2

1. Voir une démonstration ici.
2. Conséquence directe du 1. puisqu'on peut remplacer a et $\hat{A}$ par b et $\hat{B}$ ou c et $\hat{C}$.
3. Je vous laisse faire...
4. On utilise $\sin(\pi - x) = \sin x$.

   Dans le triangle ABC,

$\dfrac{AB}{\sin \hat{C}} = 2R$ donc $AB = 2R\sin(\pi - (3\alpha + 3\beta)) = 2R\sin(3\alpha + 3\beta)$

Dans ABR, $\dfrac{AR}{\sin\beta} = \dfrac{AB}{\sin \widehat{BRA}}$.

donc $AR = \sin\beta \times \dfrac{AB}{\sin(\pi - (\alpha+\beta))} = 2R\sin\beta \times \dfrac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

5. Avec la formule $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$:

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) &= \sin(\theta+2\theta) = \sin\theta\cos(2\theta) + \sin(2\theta)\cos\theta \\ &= \sin\theta(2\cos^2\theta - 1) + 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta \\ &= \sin\theta(2\cos^2\theta - 1 + 2 + 2\cos^2\theta) = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)\end{aligned}$$

6. $\sin(3\alpha+3\beta) = \sin(3(\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta)(4\cos^2(\alpha+\beta)-1)$ d'après le 5°)

En divisant par $\sin(\alpha+\beta)$, l'égalité de l'énoncé devient : $4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\gamma = 4\cos^2(\alpha+\beta) - 1$.

Or, remarquons que $3(\alpha+\beta+\gamma) = \pi$ (somme des angles dans ABC) donc $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{3}$ d'où l'on déduit $\gamma = \dfrac{\pi}{3} - (\beta+\alpha)$

$$\begin{aligned}4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\gamma &= 4\sin\left(\frac{2\pi}{3} - (\beta+\alpha)\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - (\beta+\alpha)\right) \\ &= 4\sin\left(\frac{2\pi}{3} - (\beta+\alpha)\right)\sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{3} - (\beta+\alpha)\right)\right) \\ &= 4\sin\left(\frac{2\pi}{3} - (\beta+\alpha)\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3} + (\beta+\alpha)\right) \\ &= 4\sin(p+q)\sin(p-q) = 4\frac{\cos(2p)-\cos(2q)}{-2} \\ &= -2\cos(2p) + 2\cos(2q) \\ &= -2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 2(2\cos^2(q) - 1) \\ &= -2\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\cos^2(q) - 2 = 4\cos^2(q) - 1 \\ &= 4\cos^2(\alpha+\beta) - 1\end{aligned}$$

7. D'après 6°), $\dfrac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = 4\sin\gamma\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)$ donc, en utilisant 4°), $AR = 2R\sin\beta \times 4\sin\gamma\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right) = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)$.

8. Si on reproduit le raisonnement précédent, dans le triangle AQC, à AQ au lieu de AR alors : β correspond à γ (un des angles de AQC) et γ correspond à β (l'angle ne faisant pas partie de AQC) donc $AQ = 8R\sin\gamma\sin\beta\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)$. d'où

$$\frac{AQ}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)} = 8R\sin\gamma\sin\beta = \frac{AR}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}$$

9. R, Q font sur des trisectrices de $\widehat{BAC}$ donc $\widehat{RAM} = \widehat{RAQ} = \alpha$.

Dans le triangle ARM,

$$\begin{aligned}\widehat{AMR} &= \pi - \widehat{ARM} - \widehat{RAM} = \pi - \left(\frac{\pi}{3}+\beta\right) - \alpha \\ &= \frac{2\pi}{3} - \beta - \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \beta - \alpha = \frac{\pi}{3} + \gamma\end{aligned}$$

10. $\dfrac{AM}{\sin\widehat{ARM}} = \dfrac{AR}{\sin\widehat{RMA}}$ donc $\dfrac{AM}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)} = \dfrac{AR}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)} = \dfrac{AQ}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)}$ d'après 8°). Donc $AM = AQ$. Comme M appartient par ailleurs à la demi-droite $[AQ)$, $M = Q$.

11. $M = Q$ donc $\widehat{ARQ} = \widehat{ARM} = \dfrac{\pi}{3}+\beta$ et $\widehat{AQR} = \widehat{AMR} = \dfrac{\pi}{3}+\gamma$.

12. Utilisons la formule des sinus dans ARQ : $\dfrac{RQ}{\sin\widehat{RAQ}} = \dfrac{AR}{\sin\widehat{RQA}}$

donc $\dfrac{RQ}{\sin\alpha} = \dfrac{AR}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}$ d'où

$RQ = \sin\alpha \times \dfrac{AR}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)} = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ d'après le 8°).

13. Le même raisonnement que précédent conduirait à $RP = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ et à $QP = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ donc PQR est équilatéral.

Problème 3

1. Soit H le pied de la hauteur issue de A.
   Si β est aigu :
   $\cos\beta = \dfrac{BH}{BA}$ donc $BH = c\cos\beta$.
   Dans AHC et ABH, $AH^2 = AC^2 - HC^2 = AB^2 - BH^2$ donc $y^2-(x-BH)^2 = c^2-BH^2$ d'où $y^2-x^2-BH^2+2xBH = c^2-BH^2$ ce qui donne $y^2 - x^2 + 2xc\cos\beta = c^2$, cqfd.
   Si β est obtus :
   $\cos(\pi-\beta) = \dfrac{BH}{BA}$ donc $BH = c\cos(\pi-\beta) = -c\cos\beta$.
   Dans AHC et ABH, $AH^2 = AC^2 - HC^2 = AB^2 - BH^2$ donc $y^2-(x=BH)^2 = c^2-BH^2$ d'où $y^2-x^2-BH^2-2xBH = c^2-BH^2$ ce qui donne $y^2 - x^2 + 2xc\cos\beta = c^2$, cqfd.
2. $(c+x)^2 - y^2 = c^2 + x^2 + 2cx - y^2 = 2cx + 2cx\cos\beta$ et
   $y^2 - (c-x)^2 = y^2 - c^2 - x^2 + 2cx = 2cx - 2cx\cos\beta$ donc
   $((c+x)^2-y^2)(y^2-(c-x)^2) = (2cx+2cx\cos\beta)(2cx-2cx\cos\beta) = (2cx)^2 - (2cx\cos\beta)^2 = (2cx)^2(1-\cos^2\beta) = (2cx)^2(\sin^2\beta)$ donc
   $\sqrt{((c+x)^2-y^2)(y^2-(c-x)^2)} = \sqrt{(2cx)^2(\sin^2\beta)} = 2cx\sin\beta$, etc.
3. Dans ABH, si β est aigu, $\sin\beta = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AH}{c}$ donc
   $S = \dfrac{BC \times AH}{2} = \dfrac{x \times c\sin\beta}{2}$.
   Si β est obtus, $AH = AB\sin(\pi-\beta) = AB\sin(\beta)$.
4. D'après 2°), $cx\sin\beta = \dfrac{1}{2}\sqrt{((c+x)^2-y^2)(y^2-(c-x)^2)}$
   donc $S = \dfrac{1}{4}\sqrt{((c+x)^2-y^2)(y^2-(c-x)^2)} = \sqrt{\dfrac{1}{16}((c+x)-y)((c+x)+y)(y-(c-x))(y+(c-x))}$ en utilisant $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$.
   Mais $((c+x)-y) = (c+x+y-2y) = (p-2y)$, etc. donc
   $$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{1}{16}(p-2y)p(p-2c)(p-2x)} \\ &= \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-c\right)\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right)} \end{aligned}$$
   en remarquant que $\dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$.
5. p et c sont ici constants donc $k = \dfrac{p}{2}\left(\dfrac{p}{2}-c\right)$ l'est aussi, ainsi que $m = \dfrac{p}{2}$.
   De plus, $\dfrac{p}{2}-y = \dfrac{p}{2}-y = \dfrac{p}{2}-(p-x-c) = -\dfrac{p}{2}+x+c = c+x-m$
   Prouvons que k est positive : d'abord $\dfrac{p}{2}$ l'est ; ensuite $c \leqslant x+y$ (inégalité triangulaire) donc $c \leqslant p-c$ d'où $2c \leqslant p$ ce qui donne $c \leqslant \dfrac{p}{2}$ donc $\dfrac{p}{2}-c$ est aussi positif.
6. La fonction $k(m-x)(c+x-m)$ est une fonction du second degré en x, de racines $x_1 = m$ et $x_2 = m-c$. Le coefficient de cette fonction est $k\times(-1)\times 1 = -k$ donc il est négatif ; la fonction admet donc un maximum en $x = \dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{2m-c}{2} = \dfrac{p-c}{2}$.
   x et y sont ici interchangeables donc S^2 est aussi une fonction de y qui a un maximum quand $y = \dfrac{p-c}{2}$.
   Donc, pour que S soit maximale, il faut que $x = y$.
7. Parmi les triangles ABC dont le périmètre et le côté AB sont fixés, celui qui a la plus grande aire est celui qui est isocèle en C.