Corrigé - ESGT 2012

Exercice I

1. L'équation de la tangente $T(M_0)$ est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \mathrm{e}^{x_0}(x - x_0) + \mathrm{e}^{x_0}$ (car $f' = f$) donc $y - \mathrm{e}^{x_0} = \mathrm{e}^{x_0}(x - x_0) = a(x - x_0)$ avec $a = \mathrm{e}^{x_0}$.
2. On résout le système $\begin{cases} y - \mathrm{e}^{x_0} = \mathrm{e}^{x_0}(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases}$ qui donne $-\mathrm{e}^{x_0} = \mathrm{e}^{x_0}(x - x_0)$ donc, en divisant par e^{x_0} (qui est non nul), $-1 = x - x_0$ d'où $x = x_0 - 1$.

   Pour construire la tangente au point d'abscisse x_0, on trace la droite passant par M_0 et par le point de coordonnées $(x_0 + 1\,;\, 0)$.
3. Je vous laisse faire.
4. $\alpha'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x\,\mathrm{e}^{-0,5}$ et $\beta'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x\,\mathrm{e}^{0,5}$ (remarquez que $\mathrm{e}^{-0,5}$ et $\mathrm{e}^{0,5}$ sont des constantes).

   $\alpha''(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-0,5}$ et $\beta''(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{0,5}$
5. $x \in I \iff -0,5 \leqslant x \leqslant 0,5 \iff \mathrm{e}\,-0,5 \leqslant \mathrm{e}\,x \leqslant \mathrm{e}\,0,5$ car la fonction exponentielle est croissante. On en déduit que $\alpha''(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-0,5} \geqslant 0$ et $\beta''(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{0,5} \leqslant 0$ sur I.

   Comme $\alpha''(x) \geqslant 0$, la fonction $\alpha'(x)$ est croissante sur I, de plus, $\alpha'(0) = \mathrm{e}^0 - 1 - 0 = 0$.

   De même, la fonction $\beta'(x)$ est décroissante sur I et $\beta'(0) = 0$.

x	$-0,5$		0		$0,5$
$\alpha'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

x	$-0,5$		0		$0,5$
$\beta'(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

6. Le tableau de variations de α' prouve que $\alpha'(x) \leqslant 0$ sur $[-0,5\,;\,0]$ et que $\alpha'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,0,5]$ et celui de β' prouve que $\beta'(x) \geqslant 0$ sur $[-0,5\,;\,0]$ et que $\beta'(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;\,0,5]$.
7. Remarquez que $\alpha(0) = \beta(0) = 0$.

x	$-0,5$		0		$0,5$
$\alpha'(x)$		$-$	0	$+$	
$\alpha(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

x	$-0,5$		0		$0,5$
$\beta'(x)$		$+$	0	$-$	
$\beta(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

8. 0 est le minimum de α et le maximum de β donc $\alpha(x) \geqslant 0$ et $\beta(x) \leqslant 0$ pour tout x de I.

   Or, $\alpha(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-0,5} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-0,5}$, etc.
9. En transposant $1 + x$, on trouve : $\dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-0,5} \leqslant \mathrm{e}^x - 1 - x \leqslant \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{0,5}$

   Il suffit ensuite de remarquer que $\dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-0,5}$ est positif tandis que $-\dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{0,5}$ est négatif donc $\dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-0,5} \geqslant -\dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{0,5}$.
   (remarque perfide : l'expression de la fonction α était donc trop compliquée).

   Enfin, si on divise par un x positif, $-\dfrac{x}{2}\,\mathrm{e}^{0,5} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x} \leqslant \dfrac{x}{2}\,\mathrm{e}^{0,5}$ donc $\left|\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1\right| \leqslant \left|\dfrac{x}{2}\,\mathrm{e}^{0,5}\right| = \dfrac{|x|}{2}\,\mathrm{e}^{0,5}$

   et, si on divise par un x négatif, $-\dfrac{x}{2}\,\mathrm{e}^{0,5} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x} \geqslant \dfrac{x}{2}\,\mathrm{e}^{0,5}$ donc $\left|\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1\right| \leqslant \left|\dfrac{-x}{2}\,\mathrm{e}^{0,5}\right| = \dfrac{|x|}{2}\,\mathrm{e}^{0,5}$
10. Il suffit que $\dfrac{|x|}{2}\,\mathrm{e}^{0,5} \leqslant 10^{-2}$ donc que $|x| \leqslant 2.10^{-2}\,\mathrm{e}^{-0,5} \simeq 0,0121$ donc on peut prendre $J = [-0,012\,;\,0,012]$ par exemple.

Exercice II

1. $p(M/P) = \dfrac{p(M \cap P)}{p(P)}$ et $p(P/M) = \dfrac{p(P \cap M)}{p(M)} = \dfrac{p(M \cap P)}{p(M)}$ donc $p(P/M) \times p(M) = p(P \cap M) = p(M/P)p(P)$ d'où $p(M/P) = \dfrac{p(P/M) \times p(M)}{p(P)}$.
2. L'énoncé dit que $p(M) = 1/10000 = 0,0001$ donc $p(S) = 0,9999$; $p(P/M) = 0,99$ et $p(P/S) = 0,001$ donc $p(P) = 0,99 \times 0,0001 + 0,001 \times 0,9999 = 0,0010989$.

   On en déduit que $p(M/P) = \dfrac{0,99 \times 0,0001}{0,0010989} \simeq 0,09$ soit 9 % environ.
3. Sur 100 personnes, il y a environ $100 \times 0,0010989 = 0,10989$ personne ayant un test positif.

   Parmi ce 0,10989, on trouve 91 % de personnes non malades donc environ 0,1 faux positif.
4. La question précente, sur 10000 personnes, donnerait 10 faux positifs alors que normalement, il n'y a qu'un seul malade…

Exercice III

1. Si $M(x;y)$ appartient à C alors $x^2 + y^2 = R^2\cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$ donc M est sur le cercle de centre O et de rayon R.

   Réciproquement, soit $M(x;y)$ un point du cercle de centre O et de rayon R.

   Alors $-R \leqslant x \leqslant R$ donc $-1 \leqslant \dfrac{x}{R} \leqslant 1$.

   Il existe alors un nombre t tel que $\dfrac{x}{R} = \cos t$ et, puisque $x^2 + y^2 = R^2$ on trouve $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} = \pm\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 t} = \pm R\sqrt{1 - \cos^2 t} = \pm \sin t$.

   Si $y = \sin t$ alors $M(\cos t; \sin t)$ donc $M \in C$.

   Si $y = -\sin t = \sin(-t)$ alors $M(\cos(-t) = \cos t; \sin(-t) = -\sin t)$ donc $M \in C$.
2. Si $M(x;y)$ alors $\varphi^{-1}(M) = N(x; y/k)$.
3. Les fonctions cos et sin étant 2π périodiques, on peut supposer que $t \in \mathbb{R}$.

   Remarquons alors que $\cos(t+\pi) = -\cos(t)$ et $\sin(t+\pi) = -\sin(t)$ donc $M(t)$ et $M(t+\pi)$ sont symétriques par-rapport à O.
4. Je passe.
5. Notons $M(x;y)$ et $M'(x';y') = \varphi(M)$.

   $M(x;y) \in C \iff \begin{cases} x = \alpha \cos t \\ y = \beta \sin t \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x = \alpha\cos t \\ y' = ky = k\beta \sin t = \beta' \sin t \end{cases} \iff M'(x';y') \in \Gamma$

   où Γ est une ellipse.
6. On obtient alors $\beta' = k\beta < 0$. Cependant, en remplaçant t par $-t$, on remarque que x' ne change pas (cos est paire) et que $y' = k\beta\sin(-t) = (-k\beta)\sin t = k''\sin t$ avec β'' strictement positif. donc $\varphi(E)$ reste une ellipse.
7. Il suffit que $\alpha = \beta'$ ou $\alpha = \beta''$ donc $\alpha = \pm k\beta$ donc $k = \pm\dfrac{\alpha}{\beta}$.
8. $k = \dfrac{2}{1} = 2$, on obtient alors $\alpha = \beta' = 2$ donc le cercle a pour rayon 2.

Exercice IV

1. Je passe.
2. Les tangentes sont perpendiculaires aux rayons au niveau des points de contact donc IGP et IPH sont rectangles.

   De plus, $IG = IH$ donc $\sin\widehat{GPI} = \dfrac{GI}{IP} = \dfrac{HI}{IP} = \sin\widehat{IPH}$.

   Comme les deux angles sont aigus (IGP et IPH sont rectangles), on en déduit qu'ils sont égaux donc (PI) est bissectrice de $\widehat{GPH}$.

   De même pour $(P'I)$.

3. $\widehat{GIP}+\widehat{PIH}+\widehat{HIP'}+\widehat{P'IG'}=180°$ donc $\widehat{PIP'}=180°-\widehat{GIP}-\widehat{P'IG'}=180°-(90°-\widehat{GPI})-(90°-\widehat{IP'G'})=\widehat{GPI}+\widehat{IP'G'}=\widehat{IPH}+\widehat{HP'I}$.

   Dans le triangle IPP', puisque $\widehat{PIP'}+\widehat{IPH}+\widehat{HP'I}=180°$ on obtient $\widehat{PIP'}+\widehat{PIP'}=180°$ donc $\widehat{PIP'}=90°$.

4. En utilisant l'indication :
   $\overrightarrow{HP}.\overrightarrow{HP'}=\overrightarrow{HI}^2+\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{IP'}+\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IP'}$
   De plus, $HI^2=R^2$;
   $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{IP}=\overrightarrow{HI}.(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HP})=-HI^2+\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HP}=-R^2$ car $\widehat{IHP}=90°$; de même $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{IP'}=\cdots=-R^2$;
   $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IP'}=0$ d'après le 3°).

   donc $\overrightarrow{HP}.\overrightarrow{HP'}=R^2-R^2-R^2=-R^2$.

   Remarque : la relation de l'énoncé $\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{IP'}=2\overrightarrow{IH}$ est fausse si H n'est pas le milieu de $[PP']$.

5. $$\begin{aligned}\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P'} &= (\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HP}).(\overrightarrow{G'I}+\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HP'})\\ &= \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{G'I}+\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{HP'}+\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{G'I}+\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IH}\\ &\quad +\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{HP'}+\overrightarrow{HP}.\overrightarrow{G'I}+\overrightarrow{HP}.\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HP}.\overrightarrow{HP'}\\ &= -R^2+\overrightarrow{IH}.(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI'})+\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{HP'}+R^2+0\\ &\quad -\overrightarrow{HP}.\overrightarrow{GI}+0-R^2\\ &= \overrightarrow{IH}.(\vec{0})+\overrightarrow{GI}.(\overrightarrow{HP'}-\overrightarrow{HP})-R^2\\ &= \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{PP'}-R^2=R\times 2R-R^2\\ &\quad \text{(par projection orthogonale)}\\ &= 2R^2-R^2=R^2.\end{aligned}$$

6. $\overrightarrow{GP}$ et $\overrightarrow{G'P'}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{GG'}$ donc colinéaires à $\vec{v}$.

   Comme $y_G=y_{G'}=0$, on obtient $\overrightarrow{GP}\begin{pmatrix}0\\y_P\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{G'P'}\begin{pmatrix}0\\y_{P'}\end{pmatrix}$.

   Le repère étant orthonormal, $\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P'}=0\times 0+y_P\times y_{P'}=y_Py_{P'}$ et on a supposé que
   $\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P'}=R^2$.

7. Le coefficient directeur de (PP') est : $a=\dfrac{y_P-y_{P'}}{x_P-x_{P'}}=\dfrac{y_P-y_{P'}}{x_G-x_{G'}}=\dfrac{y_P-y_{P'}}{R-(-R)}=\dfrac{y_P-y_{P'}}{2R}$
   Pour tout point $M(x;y)$ de (PP'), le ce coefficient peut aussi s'écrire : $a=\dfrac{y-y_P}{x-x_P}$ donc $\dfrac{y-y_P}{x-x_P}=\dfrac{y_P-y_{P'}}{2R}$ d'où $y=y_P+(x-R)\dfrac{y_P-y_{P'}}{2R}$.

8. Écrivons l'équation précédente sous la forme $ax+by+c=0$: $y-y_P-\dfrac{y_P-y_{P'}}{2R}x+R\dfrac{y_P-y_{P'}}{2R}=0\iff-\dfrac{y_P-y_{P'}}{2R}x+y-y_P+\dfrac{y_P-y_{P'}}{2}=0\iff(y_P-y_{P'})x+2Ry-Ry_P-Ry_{P'}=0$ donc $a=(y_P-y_{P'})$; $b=2R$; $c=-R(y_P+y_{P'})$.

   Comme $I(0;0)$, la distance cherchée est : $d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{R|y_P+y_{P'}|}{\sqrt{(y_P-y_{P'})^2+4R^2}}$.
   Or : $(y_P-y_{P'})^2+4R^2=(y_P)^2+(y_{P'})^2-2y_Py_{P'}+4R^2=(y_P)^2+(y_{P'})^2-2R^2+4R^2=(y_P)^2+(y_{P'})^2+2R^2=(y_P)^2+(y_{P'})^2+2y_Py_{P'}=(y_P+y_{P'})^2$
   donc
   $d=\dfrac{R|y_P+y_{P'}|}{|y_P+y_{P'}|}=R$.
   Soit H le projeté orthogonal de I sur (PP').
   Comme $IH=d=R$, H appartient au cercle C et puisque $(PP')\perp(IH)$, (PP') est tangente à C.

9. Une droite est tangente à un cercle si, lorsqu'elle rencontre deux tangentes à ce cercle paralléles entre elles, le produit des distances entre les points d'intersection et les points de contact entre les tangentes et le cercle est égal au carré du rayon (ouf !).

Exercice V

1. $\widehat{CBA} = \widehat{DCB}$ (alternes-internes)
   Mais $\widehat{AOC} = 2\widehat{CBA}$ et $\widehat{BOD} = 2\widehat{DCB}$ donc $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$.
   Notons α cette mesure commune des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et de $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$.
   Si on écrit $a = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et $c = r\,\mathrm{e}^{i\theta'}$ alors $\dfrac{c}{a} = \mathrm{e}^{i(\theta-\theta')} = \mathrm{e}^{i\alpha}$ et de même $\dfrac{b}{d} = \mathrm{e}^{i\alpha}$ donc $\dfrac{b}{d} = \dfrac{a}{c}$ d'où $ab = cd$.
2. $\dfrac{s}{|s|}$ et $\dfrac{z}{|z|}$ sont deux complexes de module 1 donc correspondent à des points S' et Z' du cercle de centre O et de rayon 1.
   De plus, $OA = OB$ donc O est sur la médiatrice de $[AB]$ donc $OZ = OS$, c'est-à-dire $|z| = |s|$.
   Donc $\dfrac{OS}{OS'} = |s| = |z| = \dfrac{OZ}{OZ'}$, on en déduit (Thalès) que $(SZ)//(S'Z')$ donc $(S'Z') \perp (OI)$ d'où $(S'Z')//(AB)$.
   $[S'Z']$ est donc une corde du cercle, parallèle à (AB) donc
   $\dfrac{s}{|s|}\dfrac{z}{|z|} = ab$.
   Si $Z = O$, l'expression $\dfrac{z}{|z|}$ n'a pas de sens.
3. I est le milieu de $[AB]$ et de $[ST]$ donc $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{s+t}{2}$
   donc $t = a + b - s$.
   Par ailleurs, $\dfrac{s}{|s|}\dfrac{z}{|z|} = ab$. et $|s| = |z|$ donc $s = \dfrac{ab}{z}|z|^2 = ab\bar{z}$.
   Conclusion, $t = a + b - ab\bar{z}$.
4. La médiatrice de $[AB]$ est perpendiculaire à (AB) et à (ZS) donc $(ZS)//(AB)$.
   Si $Z \in (AB)$ alors $S \in (AB)$ et S est alors le symétrique de Z par rapport à I et réciproquement donc $Z = T$.
5. Si $Z = T$ alors I est le milieu de $[ST] = [SZ]$ et $(ZS)//(AB)$ donc $(ZS) = (AB)$ d'où $Z \in (AB)$.
6. $Z \in (AB) \iff Z = T \iff z = t = a+b-ab\bar{z} \iff z+ab\bar{z} = a+b$.
7. $M(z) \in (PQ) \iff z = kp$ avec k réel
   Or $|p| = 1$ donc $|k| = |z|$ d'où $k = \pm|z|$.
   Donc :
   $M(z) \in (PQ) \iff z = \pm|z|p \iff (z - p|z|)(z + p|z|) = 0 \iff z^2 - p^2|z|^2 = 0 \iff z^2 - p^2\bar{z}z = 0 \iff z - p^2\bar{z} = 0$ en divisant par $z \neq 0$.
   Si $z = 0$ alors $Z = O \in (AB)$ et la relation reste vraie.
8. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{Z_0O}$ donc $Z_0MM'O$ est un parallélogramme d'où $(OM')//(Z_0M)$.
   Comme (PQ) et (OM') sont paralléles à $\Delta = (Z_0M)$ et passent par O, on en déduit que $(PQ) = (OM')$ donc $M' \in (PQ)$.
   $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{Z_0O} \iff z' - z = -z_0 \iff z' = z - z_0$.
9. $M(z) \in \Delta \iff M' \in (PQ) \iff z' - p^2\bar{z'} = 0$ d'après le 7°).
   Donc
   $$\begin{aligned} M(z) \in \Delta &\iff (z - z_0) - p^2\overline{(z - z_0)} = 0 \\ &\iff z - z_0 - p^2(\bar{z} - \bar{z}_0) = 0 \\ &\iff z - p^2\bar{z} = z_0 - p^2\bar{z}_0 \end{aligned}$$