Correction Sujet ESGT 2009

Exercice 1 :

→ $x^2 = \frac{25}{2}\left(y - \frac{6}{10}\right)^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1^2} - \frac{\left(y-\frac{6}{10}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2} = 1$. C'est l'équation de l' **hyperbole** de centre $\Omega\left(0, \frac{6}{10}\right)$.

si on note $a = 1$ et $b = \frac{\sqrt{2}}{5}$, on a $c = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$, donc

excentricité $e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$. asymptotes $y = y_\Omega \pm \frac{b}{a}x = \frac{6}{10} \pm \frac{\sqrt{2}}{5}x$.

foyers $F\left(\frac{3\sqrt{3}}{5}, \frac{6}{10}\right)$ et $F'\left(-\frac{3\sqrt{3}}{5}, \frac{6}{10}\right)$.

directrices $x = x_\Omega \pm \frac{a^2}{c} = \pm\frac{5}{3\sqrt{3}}$

Exercice 2 :

→ 2.1 $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{a}{b}$ avec $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = \sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}}$ après avoir calculé les modules et arguments de a et b.

donc par quotient, Z a pour module $|Z| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}}$ et pour argument $\text{Arg}(Z) = \text{Arg}(a) - \text{Arg}(b) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{7\pi}{12}}$

→ 2.2 Z^n est réel $\Leftrightarrow \text{Arg}(Z^n) = 0 + k\pi \Leftrightarrow n.\text{Arg}(Z) = 0 + k\pi \Leftrightarrow n = \frac{k\pi}{\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = k \times \frac{12}{7}$.

n est entier si et seulement si k est un multiple positif de 7 ($n = 7k'$), c'est à dire ssi $\boxed{n = 12k' \text{ est un multiple de } 12.}$

→ 2.3 on doit calculer $Z^{12} = \left(\sqrt{2}.e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} \times e^{i7\pi} = 2^6 \times (-1)$. donc $\boxed{Z^{12} = -64.}$

Exercice 3 :

A(1,0,0) B(0,2,0) C(0,0,3).

→ 3.1 le vecteur $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal au plan (ABC)..

$\vec{N} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors, $\|\vec{N}\| = \sqrt{6^2+3^2+2^2} = 7$, donc le vecteur unitaire cherché est $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$, donc $\boxed{\vec{n} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}}$

→ 3.2 $\text{aire(ABC)} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\|\vec{N}\|$ donc $\boxed{\text{aire(ABC)} = \frac{7}{2}.}$

→ 3.3 Le volume d'un parallélépipède est la valeur absolue du produit mixte des vecteurs issus d'un sommet.

donc ici, $V = \left|\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\right| = (1,0,0) \cdot (6,3,2)$ donc $\boxed{V = 6.}$

Exercice 4 :

→ l'inégalité de Schwartz sur $\int_0^1 e^{-x}.dx$ donne :

$\left(\int_0^1 e^{-x}.e^{-x}.dx\right)^2 \leq \int_0^1 \left(e^{-x}\right)^2 dx \times \int_0^1 \left(e^{-x}\right)^2 dx$ où il fallait supposer que $f(x) = g(x) = e^{-x}$ sur $[a,b] = [0,1]$.

(l'énoncé manque de clarté ...!!!).

Le premier membre vaut $\left(\int_0^1 e^{-2x}.dx\right)^2$ et le second vaut $\int_0^1 e^{-2x}dx \times \int_0^1 e^{-2x}dx$. Il y a donc égalité, donc a fortiori inégalité.

Exercice 5 :

→ 5.1 $h'(t) = 3 \times \left(\frac{1}{1+2e^{-2t}}\right)' = 3 \times \frac{-u'}{u^2}$ avec $u = 1 + 2e^{-2t}$ donc $u' = -4e^{-2t}$.

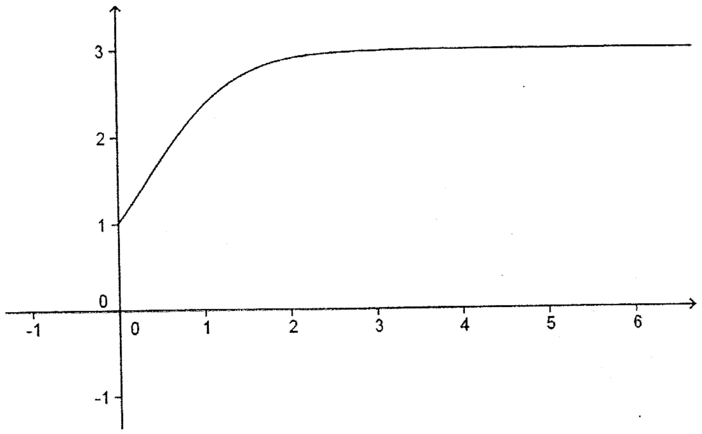
donc $h'(t) = \frac{12e^{-2t}}{\left(1+2e^{-2t}\right)^2}$. Comme le dénominateur est un carré et que $e^{-2t} > 0$ sur R, on a : $h'(t) > 0$ sur R.

la fonction h est donc **strictement croissante** sur $[0,+\infty[$.

→ 5.2 avec une table de valeurs sur la calculatrice, on obtient la courbe page suivante.
On peut préciser que la tangente en 0 a pour coef. directeur $h'(0) = 12/3^2 = 4/3$

et la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale car $\lim_{t\to+\infty} h(t) = 3$ vu que $\lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0$.

courbe de la fonction h :
(avec geogebra)



5.3 si h(t) désigne la masse au temps t (l'énoncé est encore flou !), on veut que $h(t) = 2 \times h(0)$,

c'est à dire $\dfrac{3}{1+2e^{-2t}} = 2, \Leftrightarrow 1+2e^{-2t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^{-2t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -2t = \ln(1/4) = -2\ln 2 \Leftrightarrow t = \ln 2$.

Il faut donc un temps $t = \ln 2 \approx 0{,}69$ unités de temps pour que la masse double. (l'unité de temps n'est pas précisée)

Exercice 6 :

Remarque : l'événement "avoir Face n fois de suite" a une probabilité $\frac{1}{2^n}$ donc

$\frac{1}{2^n} \le 0{,}02 \Leftrightarrow 2^n \ge 50$. Or, $2^5 = 32$ et $2^6 = 64$ donc $\boxed{n = 6.}$

Rédaction plus générale :

en n lancers, la variable aléatoire X_n donnant le nombre de Pile suit la loi Binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$.

On cherche n tel que $P(X_n = 0) \le 0{,}02$

c'est à dire : $C_n^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \le 0{,}02 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \le 0{,}02 \Leftrightarrow 2^n \ge 50 \Leftrightarrow n\ln 2 \ge \ln 50 \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln 50}{\ln 2}$ (car ln2 est positif)

$\ln 50 / \ln 2 \approx 5{,}64$ donc il faut au minimum 6 lancers pour obtenir 0 Pile avec une probabilité inférieure ou égale à 2 %.

(Attention : utiliser de préférence la notation $\binom{n}{p}$ qui remplace C_n^p dans le programme de Term. S et dans le supérieur)

Exercice 7 : $s(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

7.1 DL2 en 0 de : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \;=\; 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

donc $s(x) = \sqrt{2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)} = \sqrt{2} \times \sqrt{1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + x^2\varepsilon(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

s(x) est de la forme $k \times \sqrt{1+u}$ avec $u = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + x^2\varepsilon(x)$, donc,

comme $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + u^2\varepsilon(u)$ avec $\dfrac{u}{2} = \dfrac{x}{8} - \dfrac{x^2}{32} + x^2\varepsilon(x)$ et $\dfrac{u^2}{8} = \dfrac{x^2}{16 \times 8}$ + des termes de degré >2,

on a $s(x) = \sqrt{2} \times \left[1 + \left(\dfrac{x}{8} - \dfrac{x^2}{32}\right) - \left(\dfrac{x^2}{128}\right) + x^2\varepsilon(x)\right]$ donc $\boxed{s(x) = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{8}x - \dfrac{5\sqrt{2}}{128}x^2 + x^2\varepsilon(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

on a donc en dérivant terme à terme : $s'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{8} - \dfrac{5\sqrt{2}}{64}x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ donc $\boxed{s'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{8}.}$

On retrouve ce résultat en identifiant le DL2 de s(x) avec la formule de Mac-Laurin :

$$s(x) = s(0) + s'(0).x + s''(0).\frac{x^2}{2!} + s'''(0)\frac{x^3}{3!} + ... + s^{(n)}(0).\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

7.2 On retrouve cette valeur par le calcul direct de $s'(x)$ d'après son expression de départ :

$s'(x) = \left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u = 1 + \sqrt{1+x} = 1 + \sqrt{v}$

donc $u' = \dfrac{v'}{2\sqrt{v}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

donc $s'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$ donc $s'(0) = \dfrac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$