

2003

Ex 1

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{a}{a+1}}$$

$$\cot \alpha \sin \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \sqrt{2}$$

$$\alpha + \beta$$

$$x = \cot^2 \beta$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{\cot^2 \beta}{\cot^2 \beta + 1}} = \frac{\cot \beta}{\sqrt{\frac{\cot^2 \beta}{\sin^2 \beta} + 1}} = \frac{\cot \beta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \beta}}} = \frac{\cot \beta}{\frac{1}{\sin \beta}}$$

$$= \cot \beta \times \sin \beta = \cos \beta$$

$$\sin \alpha = \cos \beta \text{ since } \alpha \text{ and } \beta \text{ compl.}$$

$$\text{i.e. } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$x = 1$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\cot \alpha \sin \beta = 1 \Rightarrow \tan \beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

Ex II $m = -1$

2003

$$y^2 = -x^2 + 2x - 2$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2$$

circle...

$$\frac{y^2}{m} = x^2 + \frac{2(1-m)}{m}x + \frac{m-1}{m}$$

$$= x^2 - 2kx + k$$

$$= (x-k)^2 - k^2 + k$$

$$= (x-k)^2 - k(k-1)$$

$$k(k-1) = \frac{m-1}{m} \left(\frac{m-1}{m} - 1 \right)$$

$$= \frac{m-1}{m} \times \left(-\frac{1}{m} \right)$$

$$\frac{y^2}{m} = \left(x - \frac{m-1}{m} \right)^2 + \frac{m-1}{m^2}$$

$$\left(x - \frac{m-1}{m} \right)^2 - \frac{y^2}{m} + \frac{m-1}{m^2} = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} m = -1 \rightarrow \text{circle} \\ m < 0 : \text{ellipse} \\ m > 0 : \text{hyperbola} \end{array} \right.$$

Ex 3

2003

3.1 : ~~soit~~ $m \in \mathbb{R} \Rightarrow z$ réel
Si z réel alors $\frac{az+b}{cz+d}$ réel (a, b, c, d le réel)

donc $m \in \mathbb{R} \Rightarrow z$: l'aut point de $\mathbb{R} \cup \infty$ a m...

• Si z est réel alors, comme $(cz+d)z = az+b$

$$z(cz - a) = b - dz$$

$$z = \frac{b - dz}{cz - a}$$

z est aussi réel

donc l'aut point de $\mathbb{R} \cup \infty$ est l'image de...

$$\begin{aligned} \underline{3.2.} \quad z &= \frac{aiy+b}{ciy+d} = \frac{(aiy+b)(\overline{ciy+d})}{(d+aiy)(d-aiy)} \\ &= \frac{bd + acy^2 + i(ady - bcy)}{d^2 + c^2y^2} \end{aligned}$$

il faut que

$$\underline{3.3.} \quad \forall y \quad z = iy \Rightarrow z = i \cdot y$$

$$\text{donc que } bd + acy^2 = 0$$

pour tout y

$$\text{donc } bd = 0$$

$$\text{et } ac = 0$$

$$b=0 \text{ ou } d=0$$

$$a=0 \text{ ou } c=0$$

comme $ad - bc \neq 0$;

$$\text{cas (1): } z = \frac{az}{d} = \frac{b}{c} z \quad \begin{array}{l} \text{limitrophe} \\ \text{au point } 0 \\ y' \text{ y' croisé} \end{array}$$

$$\textcircled{1} \quad b=0 \text{ et } c=0$$

$$\textcircled{2} \quad d=0 \text{ et } a=0$$

$$\text{cas (2): } z = \frac{b}{cz} = \frac{b}{z} \quad \text{or } z = iy \Rightarrow z = iy$$
$$z = i \cdot y \Rightarrow z = \frac{b}{z} = iy.$$

3.4

$$\text{cas ① : } \left. \begin{array}{l} z=1 \\ \bar{z}=1 \end{array} \right\} \ell=1 \quad \text{d'après } \forall z \in \mathbb{C} : \text{identité}$$

$$\text{cas ② : } \left. \begin{array}{l} z=1 \\ \bar{z}=1 \end{array} \right\} \ell=1 \quad \text{d'après } z = \frac{1}{\bar{z}} \quad (T)$$

$$\text{inductive : } m(z) \xrightarrow{(T)} M(z) \xrightarrow{(T')} M'(z')$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d'après } z' = \frac{1}{\bar{z}} \\ z = \frac{1}{\bar{z}'} \end{array} \right\} z' = \frac{1}{\frac{1}{\bar{z}}} = \bar{z}$$

d'après (T) inductive.

$$B : \quad x \cdot z = -1 \quad \text{d'après } z = \frac{1}{-1} = -1 = \bar{z}$$

3.5

"issue de 0" : passant par 0

$$\text{d'après } y = mx \quad (\text{droite } D)$$

$$\begin{aligned} z &= x + my \\ &= x(1+mi) \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{x(1+mi)} = \frac{1-mi}{x(1+m^2)} = \frac{1}{x(1+m^2)} - \frac{m}{x(1+m^2)} i$$

$$\text{d'après } y = -mx : (D')$$

Tout point de (D) est envoyé sur (D').

$$\text{resp. : } y = -mx$$

$$z = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x(1+m^2)} + \frac{m}{x(1+m^2)} i \quad (\text{on calcule analogue des précédent})$$

$$\text{d'après } y = mx$$

Tout pt de (D') est l'image d'un point de (D).

Ex 4 2003

4.1 α $k=0$ $f(t) = e^{-t} \rightarrow 1$ en 0 et dérivable

* $k=1$ $f_1(t) = te^{-t} = \frac{t}{e^t} \rightarrow 0$ en 0

* $k \geq 2$ $f_k(t) = \frac{t^k}{e^t} \rightarrow 0$ en 0

R.R.

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = t^{k-1} e^{-t}$$

$$k=1 \quad f'(0) = 1$$

$$k \geq 2 \quad f'(0) = 0$$

$0 < k < 1$ non dérivable

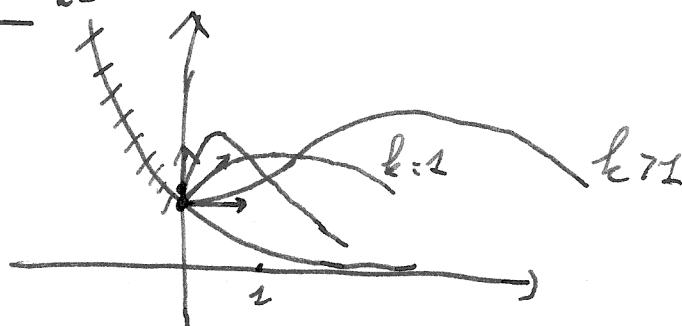
$$\begin{aligned} 4.2 \quad f'(t) &= k t^{k-1} e^{-t} - e^{-t} t^k \\ &= e^{-t} t^{k-1} (k - t) \end{aligned}$$

$\underbrace{\quad}_{\geq 0}$

$$k - t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq k$$

t	0	k	100
f'	+	0	-
f		→	→

k=0



4.3 R.R.

$$4.4 \quad I_{k+1} = \int_0^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} dt$$

$$= \underbrace{[-t^{k+2} e^{-t}]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} (-e^{-t}) (k+1) t^k dt$$

$$= (k+1) I_k$$

$$\bullet \quad I_k = k I_{k-1} = k \times (k-1) I_{k-2} = \dots = k \times \dots \times 2 \times I_1 = k! I_0$$

$$\text{et } I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1.$$

$$\text{donc } I_k = k!$$

Ex 52003

5.1 avec ordre : boule 1 puis boule 2

nb total tirages : $(x+3)(x+2)$

$$X=0 : x(x-1)$$

$$X=1 : 3 \times x + x \times 3 = 6x$$

$$X=2 : 3 \times 2 = 6$$

sans ordre : nb total : $C_{x+3}^2 = \frac{(x+3)(x+2)}{2}$

$$X=0 : C_x^2 = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$X=1 : C_x^1 \times C_3^1 = 3x$$

$$X=2 : C_3^2 = 3$$

dans les 2 cas :

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{x(x-1)}{(x+3)(x+2)}$	$\frac{6x}{(x+3)(x+2)}$	$\frac{6}{(x+3)(x+2)}$

5.2
$$E(X) = \frac{6x+12}{(x+3)(x+2)} = \frac{6}{x+3}$$

5.3
$$P(X=0) = P(X=2) : x(x-1) = 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

et $E(X) = 1$.