

2002

$$\text{Ex 1 1) } |z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{\sqrt{6}}{2} \div \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \div \sqrt{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \theta_1 = -\frac{\pi}{6}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$2) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{1-i} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$$

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1 \quad \arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \\ = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$z = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$$

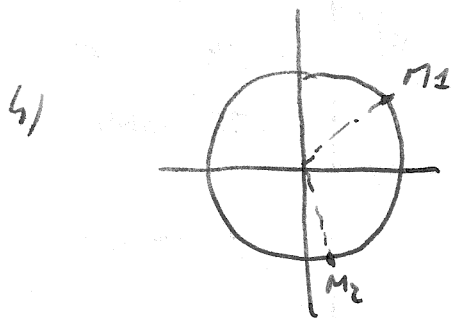
$$3) \text{ d'après 2) : } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2 \quad (\Rightarrow) \quad \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{12} \sin x = \frac{1}{2}$$

$$(\Rightarrow) \cos \left(\frac{\pi}{12} - x \right) = \frac{1}{2}$$

$$(\Rightarrow) x + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$(\Rightarrow) x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$



2002 Feb

2.1. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

donc pour n assez grand, $2^{-n} < \epsilon_n$

$$d'où $1 \leq n + 2^{-n} < 2n$$$

$$0 < \ln(n + 2^{-n}) < \ln(2n)$$

$$0 < \frac{\ln(n + 2^{-n})}{2n} < \frac{\ln(2n)}{2n}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2n)}{2n} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

donc 0.

b) $n + 2^{-n} = n + \frac{1}{2^n} = \frac{n2^n + 1}{2^n}$

$$\frac{\ln(1 + n2^n)}{2n} = \frac{\ln(2^n(n + 2^{-n}))}{2n} = \frac{\ln 2^n + \ln(n + 2^{-n})}{2n}$$

$$= \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln(n + 2^{-n})}{2n} \rightarrow 0 \quad \text{donc } \frac{\ln 2}{2}$$

2.2 a) $\mu_0 = \int_0^1 \frac{x}{1} dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$

b) $(1 + n2^n x^2)' = 2n \cdot 2^n x$

$$\text{donc } \mu_n = \left[\frac{1}{2n} \ln(1 + n \cdot 2^n \cdot x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2n} \ln(1 + n \cdot 2^n)$$

c) (μ_n) converge vers $\frac{\ln 2}{2}$.

2002 Ex3

1) g dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

en 0 : * $x > 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{array} \right\} \text{f.i.}$$

mais $x e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad (x = \frac{1}{x})$

* $x < 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$

donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x e^{\frac{1}{x}} = 0$.

variation : $g'(x) = 1 e^{\frac{1}{x}} + x \times (-\frac{1}{x^2}) e^{\frac{1}{x}}$

$= e^{\frac{1}{x}} (1 - \frac{1}{x})$ $1 - \frac{1}{x} > 0$

$(\Leftrightarrow) \frac{x-1}{x} > 0$

$(\Leftrightarrow) x < 0 \text{ ou } x > 1$

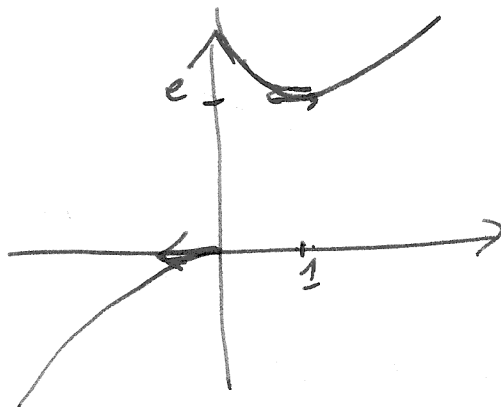
donc

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
g'	$+$	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	0	e	$+\infty$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$	$+$	$-$	$+$

2) pente tangente à gauche de 0 : $\frac{f(x) - 0}{x} = e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$

d'où :



1002 Ex 5

$$\begin{aligned} 4.1 \quad \vec{n} &= a^2 \vec{BA} + a^2 \vec{AC} - b^2 \vec{AC} + c^2 \vec{AB} \\ &= (a^2 - b^2) \vec{AC} + (c^2 - a^2) \vec{AB} \end{aligned}$$

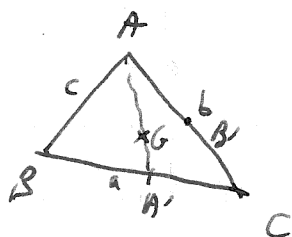
$$\vec{n} = \vec{0} \Rightarrow (a^2 - b^2) \vec{AC} = (a^2 - c^2) \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{AC} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} \vec{AB} \quad \text{car } a \neq \pm b$$

$\Rightarrow A, C, B$ alignés faux donc $\vec{n} \neq \vec{0}$.

4.2 $ay(OA')$ médiane de $[BC]$ donc $(OA') \perp (BC)$, etc...
d'où $f(O) = 0$

b) A' milieu de $[BC]$ donc $\vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MA'}$



$$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AA'}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{GA'} = \vec{BC} \cdot \frac{1}{3} \vec{AA'}$$

$$= \vec{BC} \cdot \frac{1}{3} \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$= (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} + \vec{AB}) \times \frac{1}{6} = (AC^2 - AB^2) \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} (b^2 - c^2).$$

$$f(G) = \frac{1}{6} a^2 (b^2 - c^2) + \frac{1}{6} b^2 (c^2 - a^2) + \frac{1}{6} c^2 (a^2 - b^2) = 0.$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \text{Soit } N \in (D) : f(N) = 0 \\ f(G) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a^2 \vec{BC} \cdot \vec{NG} + b^2 \vec{CA} \cdot \vec{NG} + c^2 \vec{AB} \cdot \vec{NG} = 0 \\ \text{(en sommant)} \end{array}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{NG} = 0$$

comme $\vec{n} \neq \vec{0}$: $\vec{NG} = \vec{0}$ donc $N = G$

ou $\vec{NG} \perp \vec{n}$: N est sur une droite orthog. à $\vec{n}$, passant par G

or $f(O) = 0$ donc $O \in (D)$ d'où $(D) = (OG)$ (droite d'Euler)

Réciproque : faire le chemin à l'inverse...

2002 Ex 5

Prin : $P(X=k) = \frac{d^k e^{-d}}{k!}$ $E(X) = d$ donc $d = 3T$

5.1 $P(X=0) = e^{-d} = e^{-3T}$

si $T = 0,7h$: $p_1 = e^{-2,1}$

si $T = \frac{1}{12}h$: $p_2 = e^{-0,25}$

bien sûr, $p_1 < p_2$

5.2. $d = f \cdot T$ ici $T = \frac{1}{3}h$ donc $d = \frac{1}{3}f$

$$P(X=1) > 0,5$$

$$d e^{-d} > 0,5$$

$$f e^{-\frac{1}{3}f} > 1,5$$

f ?

pas
trop
sur ...

Ex 6

1/ (3)

2/ $\vec{OM}_1$ col. à $\vec{OM}_2$

$$\Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 \pm \pi \quad (2)$$

3/ $\begin{array}{c|c} 1^\circ & \frac{\pi}{180} \\ \hline 180^\circ & \pi \end{array}$ donc (1)

$$\begin{array}{c|c} 1^\circ & \frac{200}{180} = \frac{20}{18} \pm \frac{10}{18} \\ \hline 180^\circ & 200^\circ \end{array}$$

$$1^\circ = 60' \quad (2)$$

4/ (3)

(si $a > b$ alors $|\int_a^b f| > 0$
mais $\int_a^b |f| \leq 0$)

