2001 Ex 1

1) $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{1}{2}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $\quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

ou $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $\quad$ ou $x = 2k\pi$

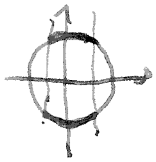
2/ ~~signe de $2\cos 2x - 1$~~ :

$\frac{2\cos 2x - 1}{1 + 2\cos 2x} = \frac{d-1}{1+d}$ du signe de $(d-1)(d+1) = d^2 - 1$

donc négatif si $d \in]-1;1[$ (entre racines) i.e :

$-1 < 2\cos 2x < 1$

~~signe de $1+2\cos 2x$~~ : $\quad -\frac{1}{2} < \cos 2x < \frac{1}{2}$

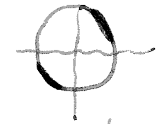


~~[illegible]~~

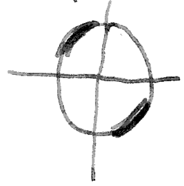
$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

ou $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

d'où : $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$ $\rightsquigarrow$



$-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi$



Ex 2

$|z| = \frac{3}{2}$

$\arg(z) = \arg(3) - \arg(\sqrt{3} + i)$

$= 0 - \frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\pi}{6}$

$|z^4| = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$

$\arg(z^4) = 4\arg(z) = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$

$z^4 = \frac{81}{16}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{81}{16}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{81}{32} - i\frac{81\sqrt{3}}{32}.$

2001 Ex3

Nb tirages : $C_{11}^3 = \frac{11\times \cancel{10}^{5}\times \cancel{9}^{3}}{\cancel{6}_{2}} = 165.$

1) Au moins 2 blanches = 2 blanches ou 3 blanches

2 blanches ↓ $C_5^2\times C_6^1 = \frac{5\times4}{\cancel{2}}\times\cancel{6}^{3} = 60$

3 blanches ↓ $C_5^3 = \frac{5\times4\times3}{6} = 10$

d'où $\frac{70}{165} = \frac{14\times\cancel{5}}{\cancel{5}\times33} = \frac{14}{33}.$

2) 2 de même couleur = 2 blanches : 60

ou 2 rouges : $C_2^2\times C_9^1 = 9$

ou 2 noires : $C_4^2\times C_7^1 = \frac{4\times3}{2}\times7 = 42$

3 de même couleur : 3 blanches : $C_5^3 = 10$

3 noires : $C_4^3 = 4$

total : $\frac{125}{165} = \frac{\cancel{5}\times25}{\cancel{5}\times33} = \frac{25}{33}.$

3) Contraire de 2 : $\frac{8}{33}.$

Ex4

2002 Ex 5

On a $\left(\frac{1}{(x^3+1)^p}\right)' = \left((x^3+1)^{-p}\right)' = -p\times 3x^2 \times (x^3+1)^{-p-1}$

$$= -3p\cdot\frac{x^2}{(x^3+1)^{p+1}}$$

d'où (I.P.P.) $I_p = \int_0^1 1\times\frac{1}{(1+x^3)^p}\,dx$

$$= \left[x\times\frac{1}{(1+x^3)^p}\right]_0^1 - \int_0^1 -3p\,\frac{x^2}{(1+x^3)^{p+1}}\times x\,dx$$

$$= \frac{1}{2^p} + 3p\int_0^1 \frac{x^3+1-1}{(1+x^3)^{p+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^p} + 3p\left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^p}\,dx - \int_0^1\frac{1}{(1+x^3)^{p+1}}\,dx\right)$$

$$I_p = \frac{1}{2^p}+3p\left(I_p - I_{p+1}\right)$$

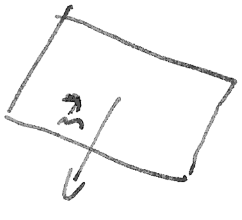
$$I_p(1-3p) = \frac{1}{2^p} - 3p\,I_{p+1}$$

$$I_{p+1} = \frac{1}{3p\cdot 2^p} + I_p\left(1-\frac{1}{3p}\right).$$

Ex 6

(S) : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{9}{4}$

$\Omega\left(\frac{3}{2};0;0\right)$ $R=\frac{3}{2}$.



(P) : $x+y+z-1=0$ v.n. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

méthode naïve : (S) et (P) ont deux pts communs :

$(1;-1;1)$ et $(1;1;-1)$ donc ils sont sécants.

centre du cercle : projection H de Ω sur (P) $\vec{\Omega H} = k\vec{n} = \begin{pmatrix}k\\k\\k\end{pmatrix}$

$x_H = k+3/2$ et $x_H+y_H+z_H-1=0$ $3k+\frac{1}{2}=0$ $k=-\frac{1}{6}$ $H\left(\frac{8}{6};-\frac{1}{6};-\frac{1}{6}\right)$

$y_H=k$ $z_H=k$

$r=\sqrt{R^2-\Omega H^2}=\sqrt{9/4-3k^2}=\sqrt{13/6}.$

2001 Ex 7

1) $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$

f' dérivée : $\frac{1}{2}\times(1+x)^{1/2-1}\times 1 = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$

f'' " : $-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$

f''' " : $\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$ $\quad 3 \to 3 \quad \times 2 ; -3$

$f^{(4)}$ " : $-\frac{3\times 5}{16}(1+x)^{-7/2}$ $\quad 4 \to 5$

$5 \to 7$

$6 \to 9$

$7 \to 11$

cas général : $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\times 1\times 3\times 5\times 7\times\dots\times(2n-3)}{2^n}(1+x)^{-\frac{(2n-1)}{2}}$

$n \geq 2$

preuve : $\cdot\ n=2$ $\quad f''(x) = \frac{(-1)^3\times 1}{4}(1+x)^{-3/2}$

$\cdot\ n : f^{(n)}(x) = \dots$

alors $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\times 3\times 5\times 7\times\dots\times(2n-3)}{2^n}\times -\frac{(2n-1)}{2}\times (1+x)^{\frac{-(2n-1)}{2}-1}$

$= \frac{(-1)^{n+2}\times 3\times 5\times\dots\times(2n-1)}{2^{n+1}}(1+x)^{\frac{-(2n+1)}{2}}$

or $2n-1 = 2(n+1)-3$

et $2n+1 = 2(n+1)-1$

2) $\cdot\ n=0$: $fg = \sum_{k=0}^{0} C_0^k f^{(k)}g^{(0-k)} = fg$ OK.. $(C_0^0 = 1)$

$\cdot\ (fg)^{(n+1)} = \left(\sum_0^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_0^n C_n^k \left(f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}\times g^{(n-k+1)}\right)$

$= \sum_0^n C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_0^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}$

(soit $j=k+1$) $= \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} f^{(j)} g^{(n+1-j)} +$ "

2001 Ex 7 (suite)

$$= \left[\sum_1^n C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + C_n^{n+1-1} f^{(n+1)} g^{(n+1-(n+1))} \right]$$

$$+ \left[C_n^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_1^n C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right]$$

$$= \underset{\substack{\parallel \\ 1 \\ \parallel \\ C_{n+1}^0}}{C_n^0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \underset{\substack{\parallel \\ 1 \\ \parallel \\ C_{n+1}^{n+1}}}{\underbrace{C_n^n}} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_1^n \left(\underbrace{C_n^{k-1} + C_n^k}_{= C_{n+1}^k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_0^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

a.

3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 1$

$f'(x) = x^2 + 2x$

$f''(x) = 2x + 2$

$f^{(3)}(x) = 2$

$f^{(4)}(x) = 0$

$f^{(n)}(x) = 0$ si $n \geqslant 4$

$g(x) = \sqrt{1+x}$

$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \times 1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2^n} (1+x)^{-n+1/2}$

$g^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^n 1 \times 3 \times \dots (2n-5)}{2^{n-1}} (1+x)^{-n+3/2}$

$g^{(n-2)}(x) = \dots$

$g^{(n-3)}(x) = \dots$

donc $h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{3} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 1\right) \times (-1)^{n-2} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-9)}{2^{n-3}} (1+x)^{-n+7/2}$$

$$+ n \times (x^2 + 2x) \times (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-7)}{2^{n-2}} (1+x)^{-n+5/2}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \times (2x+2) \times (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-5)}{2^{n-1}} (1+x)^{-n+3/2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times 2 \times \frac{(-1)^{n+1} 1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2^n} (1+x)^{-n+1/2}$$