

Cours et exercices : Fonction racine carrée

1) Définition

La fonction **racine carrée** est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$, où \sqrt{x} est le nombre positif tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

Remarque : on a donc $\sqrt{x} = k \iff x = k^2$ quand $k \geq 0$.

Exercice I

Résoudre les équations suivantes :

1°) $3\sqrt{x} + 2 = 8$

2°) $1 - 2\sqrt{x} = 3$

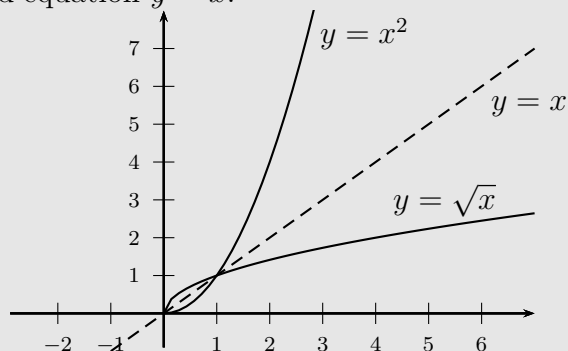
3°) $\sqrt{5 - 3x} = 2$

Exercice II

Pour quels x la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2 - 3x}$ est-elle définie ? Quel est donc son ensemble de définition ?

2) Courbe de la fonction racine carrée

Comme la fonction racine carrée est la fonction réciproque de la fonction carrée sur $[0; +\infty[$, leur courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

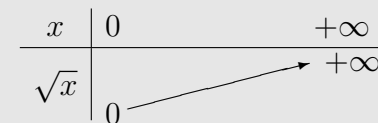


La courbe de la fonction racine carrée est donc une demi-parabole.

3) Variations de la fonction racine carrée

Propriété 1 (admise)

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.



Remarque : on peut en déduire que :

- ➔ $\sqrt{x} = \sqrt{y} \iff x = y$ et $x \geq 0$;
- ➔ $\sqrt{x} < \sqrt{y} \iff 0 \leq x < y$;
- ➔ $\sqrt{x} < y \iff 0 \leq x < y^2$.

Exercice III

On cherche à résoudre les (in)équations qui vont suivre.

Dans chaque cas, déterminez les x pour lesquels les racines carrées ont un sens puis résolvez (si nécessaire ...) les (in)équations.

1°) $\sqrt{3x - 4} = \sqrt{x}$	2°) $\sqrt{2x - 8} = \sqrt{2 - x}$	3°) $\sqrt{5x + 10} = \sqrt{20x + 50}$
4°) $\sqrt{x} \leq 3$	5°) $\sqrt{x} \geq -2$	6°) $\sqrt{x} \leq -1$
7°) $\sqrt{x} \leq \frac{3}{5}$	8°) $-3\sqrt{x} + 5 \leq 4$	9°) $\sqrt{2 - x} \geq \sqrt{x + 3}$

Vérifiez la réponse au 9°) à l'aide de votre calculatrice graphique.

Exercice IV

Soit un coût unitaire en euros qui peut être modélisé par la fonction suivante (x représentant la quantité de kg produits) :

$$c(x) = 50 + 2\sqrt{x - 30}$$

La production minimale quotidienne est de 30 kg. Quelle production maximale doit être réalisée pour ne pas dépasser un coût unitaire de 100 € ?

4) Variations de fonctions comportant la fonction racine carrée

Propriété 2

Si une fonction f est définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ (où u ne prend que des valeurs positives) alors f a les mêmes variations que u .

(la fonction racine carrée, étant croissante, ne change pas l'ordre.)

Exercice V

Pour chacune des trois fonctions suivantes :

- trouvez l'ensemble de définition de f ;
- trouvez les variations de f sur cet ensemble de définition ;
- résoudre graphiquement puis par le calcul $f(x) \geq 3$.

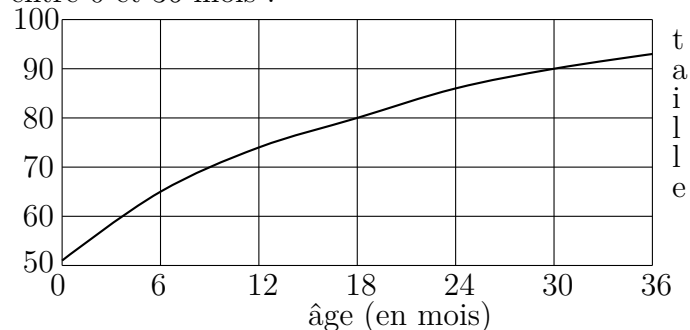
1°) $f(x) = \sqrt{4x - 1}$

2°) $f(x) = \sqrt{5 - 3x}$

3°) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$

Exercice VI

Considérons le graphique suivant donnant la taille moyenne en cm d'un enfant entre 0 et 36 mois :



Cette courbe faisant penser à celle de la fonction racine carrée, on suppose, en notant x l'âge et $f(x)$ la taille, que $f(x) = a\sqrt{x} + b$.

- Déterminez des valeurs approchées de a et de b .
- En suivant cette courbe, quelle serait la taille d'un enfant de 4 ans ? d'un adulte de 20 ans ?

4) Variations de fonctions comportant la fonction racine carrée

Propriété 2

Si une fonction f est définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ (où u ne prend que des valeurs positives) alors f a les mêmes variations que u .

(la fonction racine carrée, étant croissante, ne change pas l'ordre.)

Exercice V

Pour chacune des trois fonctions suivantes :

- trouvez l'ensemble de définition de f ;
- trouvez les variations de f sur cet ensemble de définition ;
- résoudre graphiquement puis par le calcul $f(x) \geq 3$.

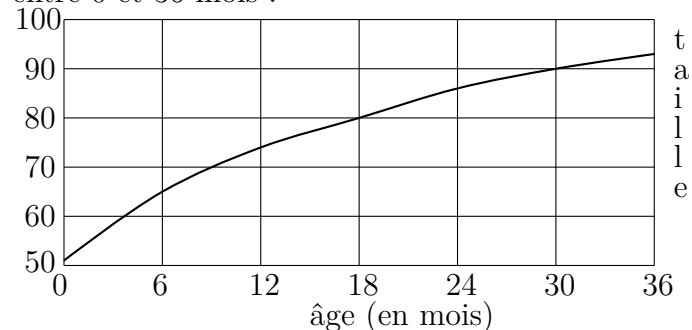
1°) $f(x) = \sqrt{4x - 1}$

2°) $f(x) = \sqrt{5 - 3x}$

3°) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$

Exercice VI

Considérons le graphique suivant donnant la taille moyenne en cm d'un enfant entre 0 et 36 mois :



Cette courbe faisant penser à celle de la fonction racine carrée, on suppose, en notant x l'âge et $f(x)$ la taille, que $f(x) = a\sqrt{x} + b$.

- Déterminez des valeurs approchées de a et de b .
- En suivant cette courbe, quelle serait la taille d'un enfant de 4 ans ? d'un adulte de 20 ans ?