Repères et coordonnées dans le plan

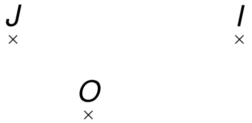
Y. Moncheaux

Septembre 2014

Table des matires

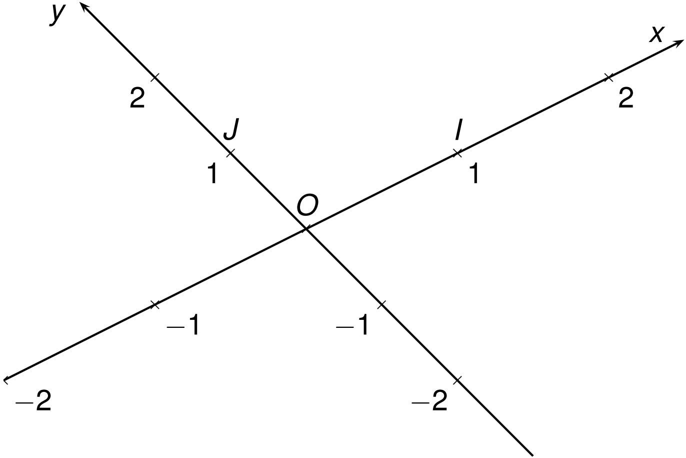
I – Repère et coordonnées (définitions)

Ⓓ $(O\,; I, J)$ est un repère du plan si les points O, I, J ne sont pas alignés. O est l'origine de ce repère.



I – Repère et coordonnées (définitions)

Ⓓ $(O\,;\,I,\,J)$ est un repère du plan si les points O, I, J ne sont pas alignés. O est l'origine de ce repère.

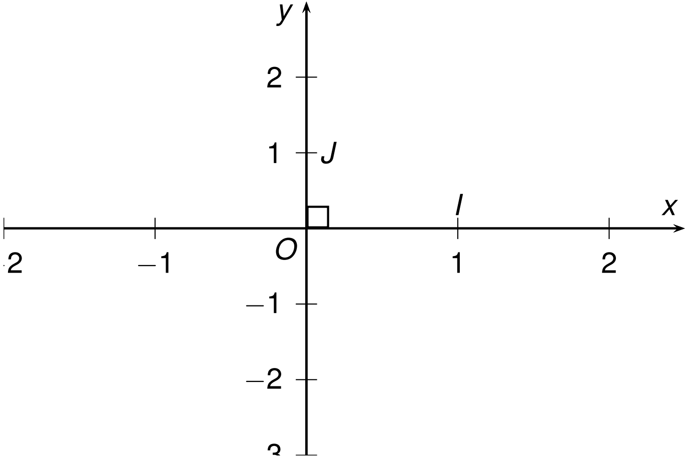


I – Repère et coordonnées (définitions)

Le repère $(O\,;\,I,\,J)$ est orthogonal si $(OI) \perp (OJ)$.

I – Repère et coordonnées (définitions)

Le repère $(O\,; I, J)$ est orthogonal si $(OI) \perp (OJ)$.

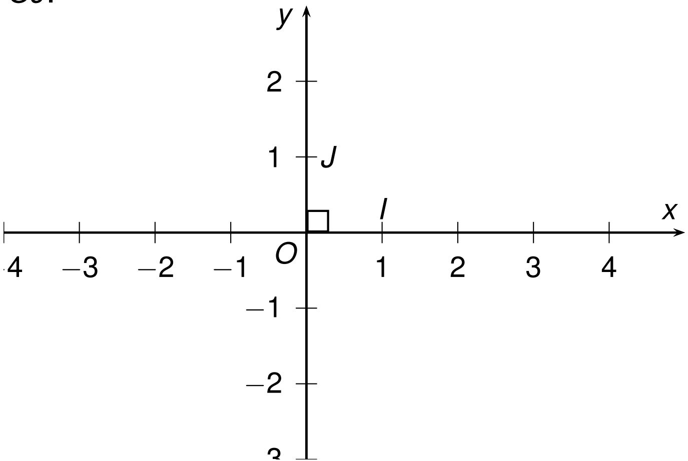


I – Repère et coordonnées (définitions)

Le repère $(O\,;\,I,\,J)$ est orthonormé si $(OI) \perp (OJ)$ et si $OI = OJ$.

I – Repère et coordonnées (définitions)

Le repère $(O\,;\,I,\,J)$ est orthonormé si $(OI) \perp (OJ)$ et si $OI = OJ$.

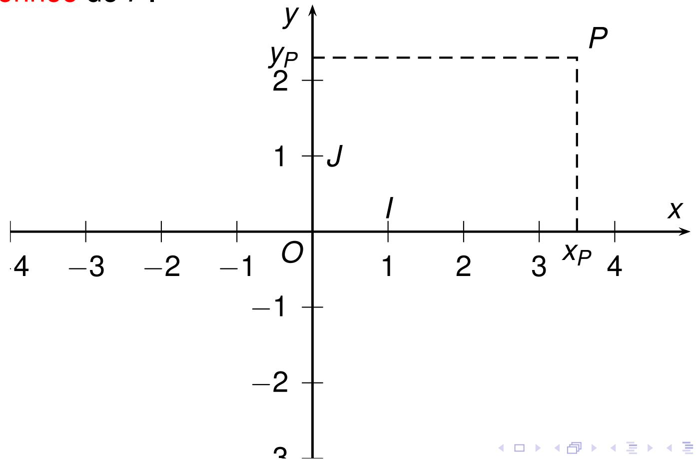


I – Repère et coordonnées (définitions)

Ⓓ Ⓟ Dans un repère $(O\,;\,I,\,J)$, tout point P a un unique couple de coordonnées $(x_P\,;\,y_P)$. x_P est l'abscisse de P et y_P est l'ordonnée de P.

I – Repère et coordonnées (définitions)

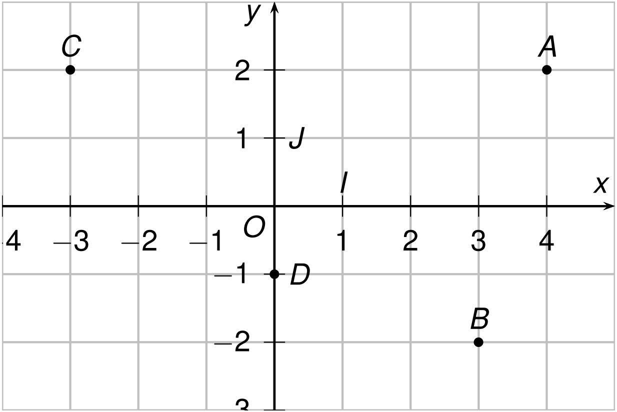
Ⓓ Ⓟ Dans un repère $(O\,;\,I,\,J)$, tout point P a un unique couple de coordonnées $(x_P\,;\,y_P)$. x_P est l'abscisse de P et y_P est l'ordonnée de P.



I – Repère et coordonnées (définitions)

On note : $P\,(x_P\,;\,y_P)$.

Ne pas noter forcément



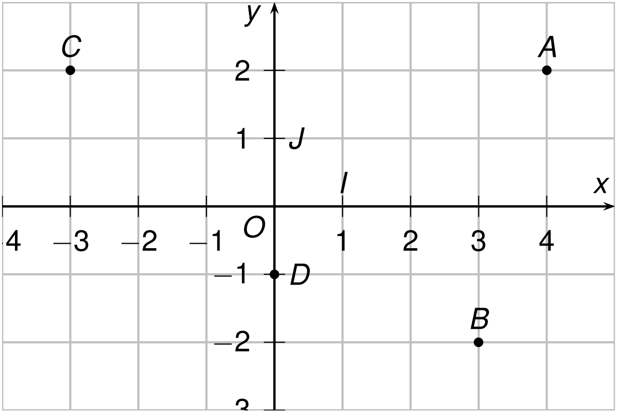
Coordonnées de A :

Coordonnées de B :

Coordonnées de C :

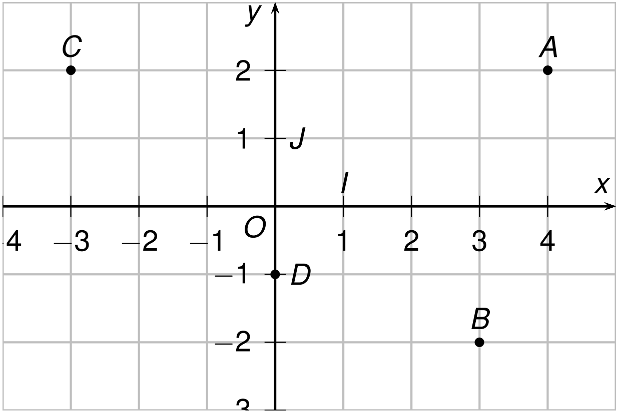
Coordonnées de D :

Ne pas noter forcément



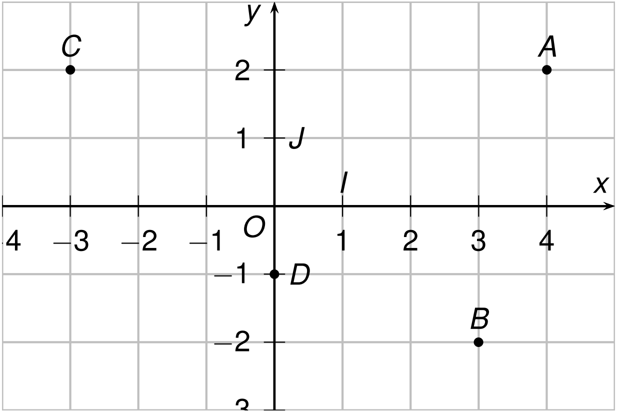
Coordonnées de A : $(4\,;\,2)$.
Coordonnées de B :
Coordonnées de C :
Coordonnées de D :

Ne pas noter forcément



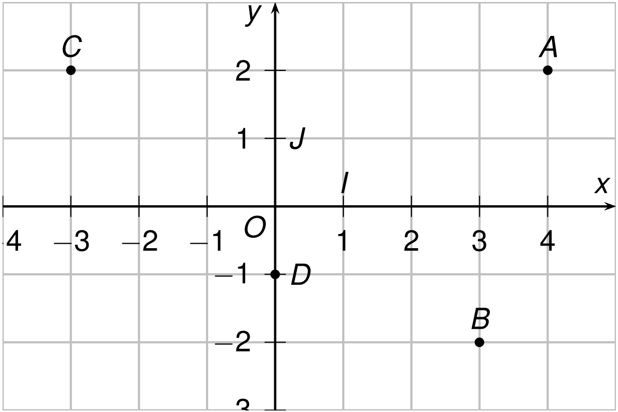
Coordonnées de A : $(4\,;\,2)$.
Coordonnées de B : $(3\,;\,-2)$.
Coordonnées de C :
Coordonnées de D :

Ne pas noter forcément

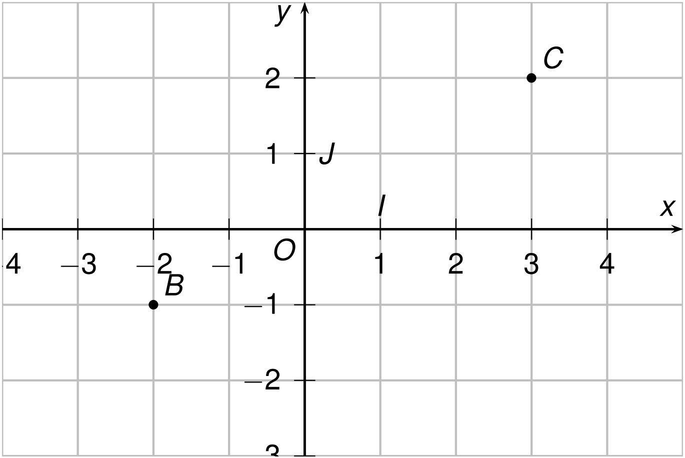


Coordonnées de A : $(4\,;\,2)$.
Coordonnées de B : $(3\,;\,-2)$.
Coordonnées de C : $(-3\,;\,2)$.
Coordonnées de D :

Ne pas noter forcément

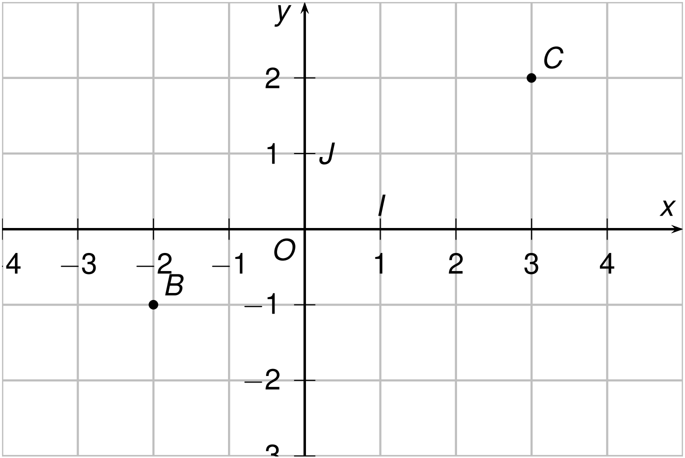


Coordonnées de A : $(4\,;\,2)$.
Coordonnées de B : $(3\,;\,-2)$.
Coordonnées de C : $(-3\,;\,2)$.
Coordonnées de D : $(0\,;\,-1)$.



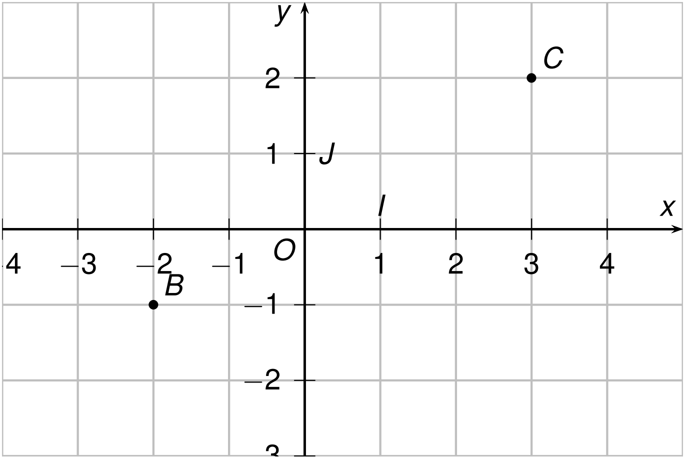
$y_B =$

$x_C =$



$y_B =$ -1

$x_C =$



$y_B =$ -1
$x_C = 3$

Si $A\,(-2\,;\,7)$ et $C\,(-3\,;\,-1)$
alors $y_C - y_A =$
$x_A - x_C =$

Exercices

Si $A\,(-2\,;\,7)$ et $C\,(-3\,;\,-1)$
alors $y_C - y_A = \ -8$
$x_A - x_C =$

Exercices

Si $A\,(-2\,;\,7)$ et $C\,(-3\,;\,-1)$
alors $y_C - y_A = \ -8$
$x_A - x_C = 1$

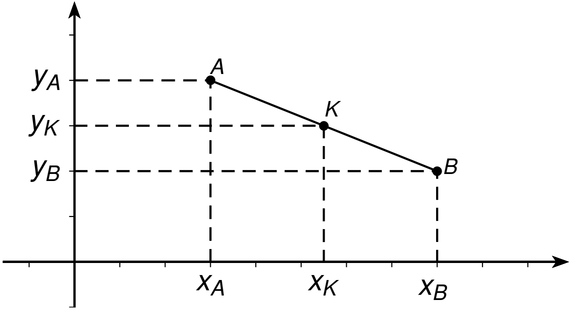
Exercices

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Ⓟ Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$ dans un repère quelconque.

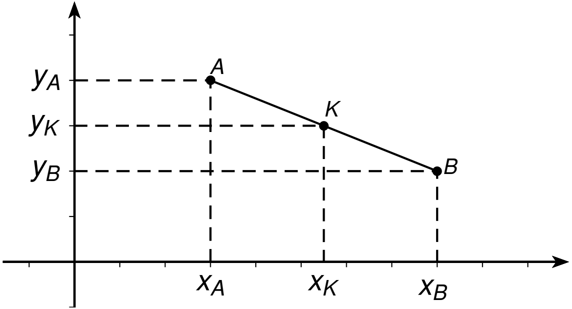
II – Coordonnées du milieu d'un segment

Ⓟ Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A\,;\ y_A)$ et $(x_B\,;\ y_B)$ dans un repère quelconque.



II – Coordonnées du milieu d'un segment

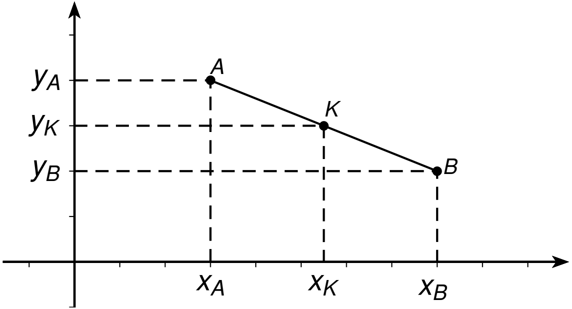
Ⓟ Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A\,;\ y_A)$ et $(x_B\,;\ y_B)$ dans un repère quelconque.



K est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Ⓟ Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A\,;\ y_A)$ et $(x_B\,;\ y_B)$ dans un repère quelconque.

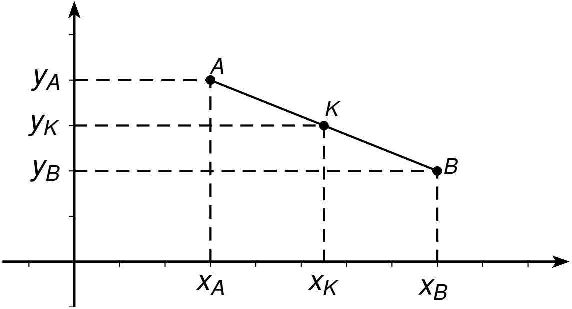


K est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si

$$\boxed{x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_B}{2}}.$$

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Ⓟ Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A\,;\ y_A)$ et $(x_B\,;\ y_B)$ dans un repère quelconque.



K est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si

$$\boxed{x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_B}{2}}.$$

(on calcule la moyenne des x puis celle des y).

II – Coordonnées du milieu d’un segment

Exemple

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Trouver les coordonnées de T milieu du segment $[RS]$.

Réponses

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Exemple

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Trouver les coordonnées de T milieu du segment $[RS]$.

Réponses

T est le milieu du segment $[RS]$ donc

$$x_T = \frac{x_R + x_S}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } y_T = \frac{y_R + y_S}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$$

donc $T\left(\frac{1}{2}\,;\,3\right)$.

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Exemple

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Trouver les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Exemple

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Trouver les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

U symétrique de S par rapport à $R \iff R$ est le milieu du

segment $[US]$

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Exemple

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Trouver les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

U symétrique de S par rapport à $R \iff R$ est le milieu du segment $[US]$ $\iff \begin{cases} x_R = \dfrac{x_U + x_S}{2} \\ y_R = \dfrac{y_U + y_S}{2} \end{cases}$

II – Coordonnées du milieu d’un segment

Exemple

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Trouver les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

U symétrique de S par rapport à $R \iff R$ est le milieu du segment $[US]$ $\iff \begin{cases} x_R = \dfrac{x_U + x_S}{2} \\ y_R = \dfrac{y_U + y_S}{2} \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} -2 = \dfrac{x_U + 3}{2} \\ 1 = \dfrac{y_U + 5}{2} \end{cases}$$

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Exemple

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Trouver les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

U symétrique de S par rapport à $R \iff R$ est le milieu du segment $[US]$ $\iff \begin{cases} x_R = \dfrac{x_U + x_S}{2} \\ y_R = \dfrac{y_U + y_S}{2} \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} -2 = \dfrac{x_U + 3}{2} \\ 1 = \dfrac{y_U + 5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = x_U + 3 \\ 2 = y_U + 5 \end{cases}$$

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Exemple

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Trouver les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

U symétrique de S par rapport à $R \iff R$ est le milieu du segment $[US]$ $\iff \begin{cases} x_R = \dfrac{x_U + x_S}{2} \\ y_R = \dfrac{y_U + y_S}{2} \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} -2 = \dfrac{x_U + 3}{2} \\ 1 = \dfrac{y_U + 5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = x_U + 3 \\ 2 = y_U + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} -7 = x_U \\ -3 = y_U \end{cases}$$

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Exemple

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Trouver les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

U symétrique de S par rapport à $R \iff R$ est le milieu du segment $[US]$ $\iff \begin{cases} x_R = \dfrac{x_U + x_S}{2} \\ y_R = \dfrac{y_U + y_S}{2} \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} -2 = \dfrac{x_U + 3}{2} \\ 1 = \dfrac{y_U + 5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = x_U + 3 \\ 2 = y_U + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} -7 = x_U \\ -3 = y_U \end{cases}$$

donc $U\ (-7\,;\,-3)$.

Exercices

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Exemple

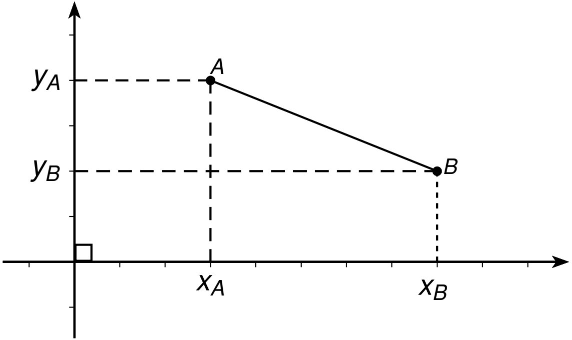
Soient, dans un repère $(O\,;\,I, J)$, les points $A\,(-2\,;\,1)$, $B\,(-1\,;\,4)$, $C\,(2\,;\,1)$, $D\,(1\,;\,-2)$.
Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

III – Distance entre deux points

Ⓟ Soient $A\ (x_A\,;\ y_A)$ et $B\ (x_B\,;\ y_B)$ dans un **repère orthonormé.**

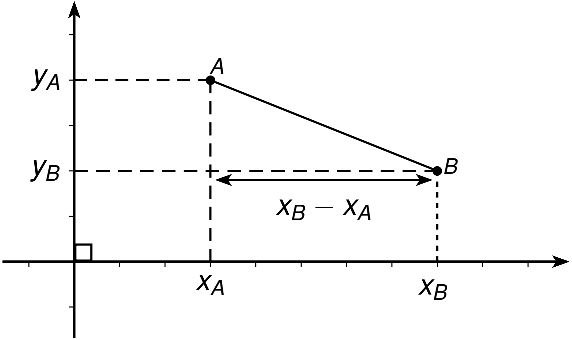
III – Distance entre deux points

Ⓟ Soient $A\ (x_A\,;\ y_A)$ et $B\ (x_B\,;\ y_B)$ dans un **repère orthonormé.**



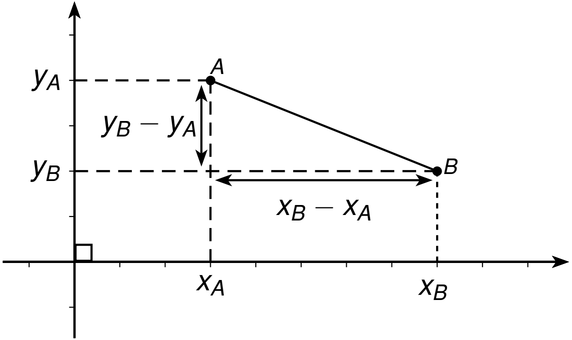
III – Distance entre deux points

Ⓟ Soient $A\ (x_A\ ;\ y_A)$ et $B\ (x_B\ ;\ y_B)$ dans un **repère orthonormé.**



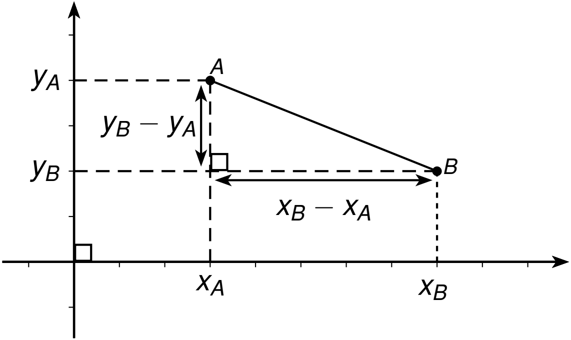
III – Distance entre deux points

Ⓟ Soient $A\ (x_A\,;\ y_A)$ et $B\ (x_B\,;\ y_B)$ dans un **repère orthonormé.**



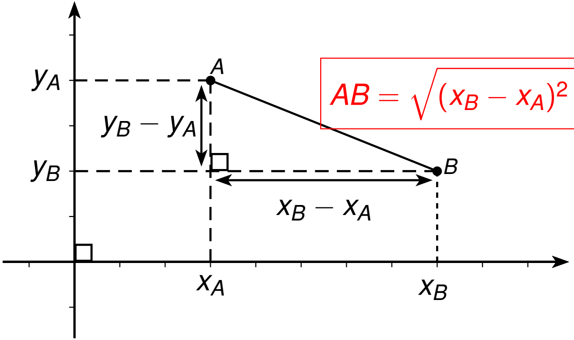
III – Distance entre deux points

Ⓟ Soient $A\ (x_A\ ;\ y_A)$ et $B\ (x_B\ ;\ y_B)$ dans un **repère orthonormé.**



III – Distance entre deux points

Ⓟ Soient $A\ (x_A\ ;\ y_A)$ et $B\ (x_B\ ;\ y_B)$ dans un **repère orthonormé.**



$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

III – Distance entre deux points

Exemple

Soient $M\,(-2\,;\,4)$ et $N\,(3\,;\,2)$.
Calculer la distance MN.

Réponses

III – Distance entre deux points

Exemple

Soient $M\,(-2\,;\,4)$ et $N\,(3\,;\,2)$.
Calculer la distance MN.

Réponses

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$$

III – Distance entre deux points

Exemple

Soient $M\,(-2\,;\,4)$ et $N\,(3\,;\,2)$.
Calculer la distance MN.

Réponses

$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-4)^2}$

III – Distance entre deux points

Exemple

Soient $M\,(-2\,;\,4)$ et $N\,(3\,;\,2)$.
Calculer la distance MN.

Réponses

$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5^2 + (-2)^2}$

III – Distance entre deux points

Exemple

Soient $M\,(-2\,;\,4)$ et $N\,(3\,;\,2)$.
Calculer la distance MN.

Réponses

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

III – Distance entre deux points

® L'unité de longueur est OI.

III – Distance entre deux points

Ⓡ L'unité de longueur est OI.

Ⓡ On ne peut pas éliminer la racine avec les carrés, par exemple, $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$.

III – Distance entre deux points

® L'unité de longueur est OI.

® On ne peut pas éliminer la racine avec les carrés, par exemple, $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$.

® La valeur attendue comporte en général une racine carrée.

III – Distance entre deux points

Exemple

Soient $A\ (-1\ ;\ 2)$, $B\ (1\ ;\ 5)$ et $C\ (4\ ;\ 3)$.
Étudier la nature du triangle ABC.

Réponses

III – Distance entre deux points

Exemple

Soient $A\ (-1\ ;\ 2)$, $B\ (1\ ;\ 5)$ et $C\ (4\ ;\ 3)$.
Étudier la nature du triangle ABC.

Réponses

On calcule les longueurs des côtés (...) :

III – Distance entre deux points

Exemple

Soient $A\,(-1\,;\,2)$, $B\,(1\,;\,5)$ et $C\,(4\,;\,3)$.
Étudier la nature du triangle ABC.

Réponses

On calcule les longueurs des côtés (. . .) :
$AB = \sqrt{13}$, $AC = \sqrt{26}$ et $BC = \sqrt{13}$.

III – Distance entre deux points

Exemple

Soient $A\ (-1\,;\,2)$, $B\ (1\,;\,5)$ et $C\ (4\,;\,3)$.
Étudier la nature du triangle ABC.

Réponses

On calcule les longueurs des côtés (...) :
$AB = \sqrt{13}$, $AC = \sqrt{26}$ et $BC = \sqrt{13}$.
Le triangle ABC est donc isocèle (en B).

III – Distance entre deux points

Exemple

Soient $A\ (-1\ ;\ 2)$, $B\ (1\ ;\ 5)$ et $C\ (4\ ;\ 3)$.
Étudier la nature du triangle ABC.

Réponses

On calcule les longueurs des côtés (...) :
$AB = \sqrt{13}$, $AC = \sqrt{26}$ et $BC = \sqrt{13}$.
Le triangle ABC est donc isocèle (en B).
De plus, $AC^2 = (\sqrt{26})^2 = 26$
$AB^2 + BC^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = 13 + 13 = 26$

III – Distance entre deux points

Exemple

Soient $A\ (-1\,;\,2)$, $B\ (1\,;\,5)$ et $C\ (4\,;\,3)$.
Étudier la nature du triangle ABC.

Réponses

On calcule les longueurs des côtés (...) :
$AB = \sqrt{13}$, $AC = \sqrt{26}$ et $BC = \sqrt{13}$.
Le triangle ABC est donc isocèle (en B).
De plus, $AC^2 = (\sqrt{26})^2 = 26$
$AB^2 + BC^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = 13 + 13 = 26$
d'où $AC^2 = AB^2 + BC^2$

III – Distance entre deux points

Exemple

Soient $A\ (-1\,;\,2)$, $B\ (1\,;\,5)$ et $C\ (4\,;\,3)$.
Étudier la nature du triangle ABC.

Réponses

On calcule les longueurs des côtés (...) :
$AB = \sqrt{13}$, $AC = \sqrt{26}$ et $BC = \sqrt{13}$.
Le triangle ABC est donc isocèle (en B).
De plus, $AC^2 = (\sqrt{26})^2 = 26$
$AB^2 + BC^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = 13 + 13 = 26$
d'où $AC^2 = AB^2 + BC^2$
donc ABC est aussi rectangle en B (réc. de Pythagore).

III – Distance entre deux points

ne pas forcément noter

Applications du calcul de distances :

- montrer qu'un triangle est rectangle ou isocèle, etc.
- trouver une mesure d'un angle (trigonométrie) ;
- montrer qu'un point est sur un cercle donné ; sur une médiatrice ;
- montrer qu'un point est sur une médiatrice ;
- etc.

Exercices du III