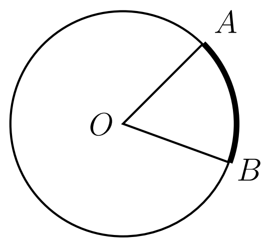
Trigonométrie dans le cercle trigonométrique

I. Mesure en radians d'un angle

Soit, dans un cercle de rayon 1, un angle $\widehat{AOB}$ interceptant un arc $\overset{\frown}{AB}$. La mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ est alors égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ correspondant. Un angle de mesure 180° intercepte un arc de longueur $(2\pi R)/2 = \pi$ ($\times$ unité de longueur) donc $\boxed{\pi \text{ radians correspondent à } 180°}$.



Par ailleurs, les mesures en radians et en degrés d'un même angle sont proportionnelles.

Conversion des angles les plus utilisés :

α (en degrés)	0	30	45	60	90	180	360
α (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Propriété 1

Dans le cas général d'un angle de mesure α radians interceptant un arc de longueur ℓ sur un cercle de rayon R, on a :

$$\boxed{\ell = \alpha R}.$$

Remarque : la somme des angles géométriques d'un triangle est égale à π radians.

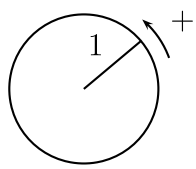
II. Orientation du plan, cercle trigonométrique

1) Orientation du plan

On oriente un plan en choisissant le même sens de parcours sur tous les cercles de ce plan. Ce sens de parcours est alors appelé sens direct ou sens positif. Par convention, nous choisirons comme sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (aussi appelé sens trigonométrique).

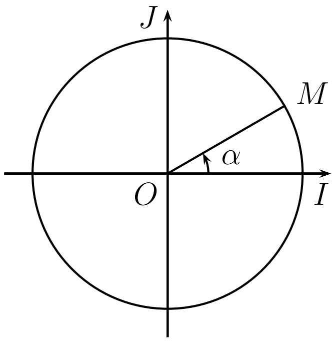
2) Cercle trigonométrique

Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 (c'est-à-dire l'unité de mesure choisie), orienté dans le sens trigonométrique.



Propriété 2

A tout réel α correspond un point M unique du cercle trigonométrique, pour lequel l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ a pour mesure α.



Remarque : Soit α un réel et M son point associé. Alors tous les réels de la forme $\alpha + 2k\pi$ sont aussi associés au point M. En effet, $2k\pi$ indique un certain nombre k de tours (un tour de cercle fait $2\pi R = 2\pi$). On dit qu'une mesure d'angle orienté est définie modulo 2π.

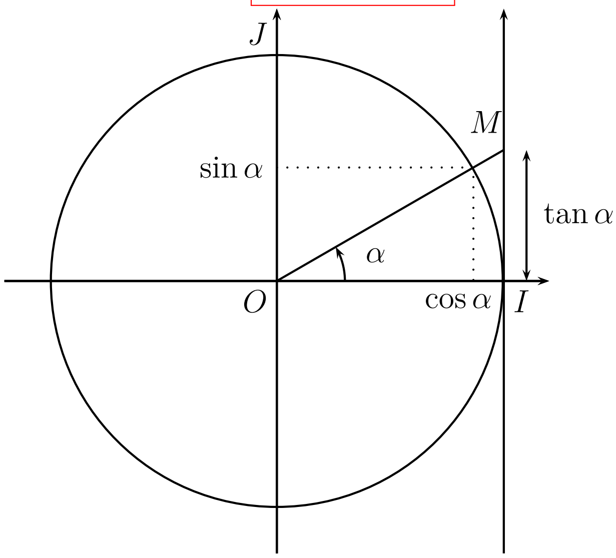
III. Lignes trigonométriques

1) Cosinus et sinus d'un réel

Un point M étant associé à un réel α, on définit respectivement $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ comme l'abscisse et l'ordonnée de M dans le repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OJ}\right)$.

$$\boxed{\cos\alpha = x_M \text{ et } \sin\alpha = y_M}$$

Enfin, soit N l'intersection de la droite (OM) avec la tangente au cercle en I. Alors l'abscisse de N dans le repère $(I, \overrightarrow{OJ})$ est notée $\tan\alpha$ et on prouve que $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$.



Remarque : Le théorème de Pythagore montre que pour tout α on a

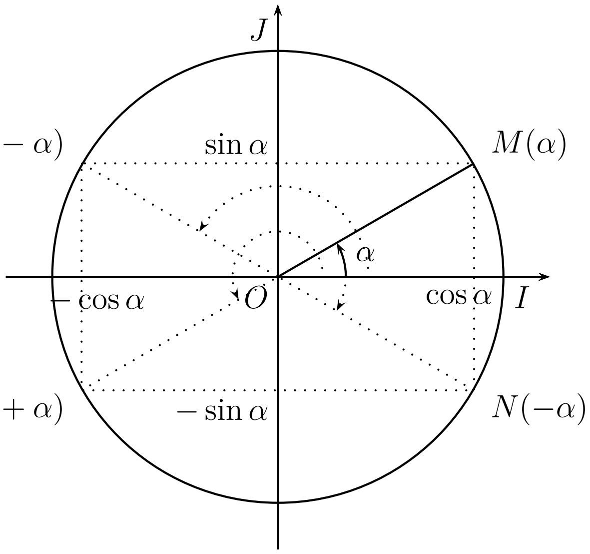
$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

Valeurs remarquables :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	///	0

2) Lignes trigonométriques des angles associès

Soit α un réel et M le point du cercle trigonométrique associé à α (les coordonnées de M sont donc $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$). Soient N, P, Q les symétriques de M par rapport, respectivement, à l'axe des abscisses, à O et à l'axe des ordonnées.



Point	*Angle associé*	*Abscisse*	*Ordonnée*	*Conséquences*
M	α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	
N	$-\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\boxed{\cos(-\alpha)=\cos\alpha \quad \text{et} \quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha}$
P	$\pi+\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\boxed{\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \quad \text{et} \quad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha}$
Q	$\pi-\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\boxed{\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \quad \text{et} \quad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha}$

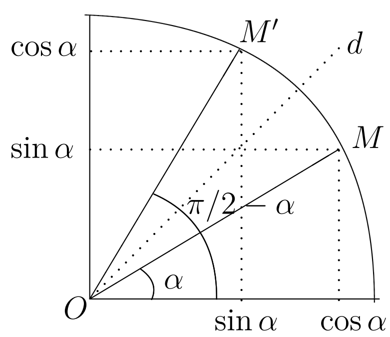
Remarque : les relations $\boxed{\cos(-\alpha)=\cos\alpha \quad \text{et} \quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha}$ montrent que $\boxed{\text{la fonction cosinus est paire}}$ et que $\boxed{\text{la fonction sinus est impaire}}$.

Exemples 1 :

- $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}$.
- $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}$.
- $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{12}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=\sin\dfrac{\pi}{12}$.

– Enfin, soit M' le symétrique de M par rapport à la bissectrice d du premier quadrant. Le point M' est alors associé à l'angle $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$. La symétrie par rapport à la bissectrice permutant les coordonnées, on a :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha}$$



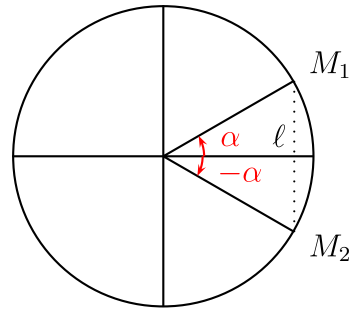
Exemple 2 : On a $\sin\dfrac{\pi}{6}=\cos\dfrac{\pi}{3}$.

3) Équations trigonométriques

Soit k un entier. Le nombre $k.2\pi$ indique un certain nombre k de tours, qui n'affectent pas la position d'un point sur le cercle.

a) Équations de la forme $\cos x = \ell$

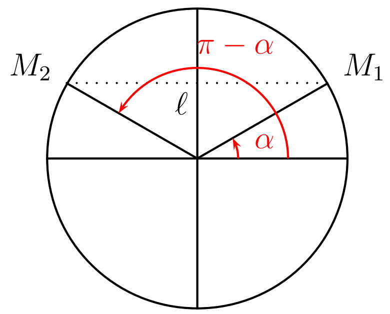
ℓ étant donné, les solutions de l'équation $\cos x = \ell$ sont :
- Si $\ell < -1$ ou $\ell > 1$: pas de solution.
- Si $\ell = -1$: $x = \pi + 2k\pi$.
- Si $\ell = 1$: $x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$.
- Si $-1 < \ell < 1$: deux solutions principales opposées (cas de la figure ci-contre) donc $\boxed{x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi}$



Exemple 3 :
L'équation $2\cos x + 1 = 0$ revient à $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ (à l'aide d'une symétrie), on en déduit $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

b) Équations de la forme $\sin x = \ell$

ℓ étant un réel donné, les solutions de l'équation $\sin x = \ell$ sont :
- Si $\ell < -1$ ou $\ell > 1$: pas de solution.
- Si $\ell = -1$: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- Si $\ell = 1$: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- Si $-1 < \ell < 1$: deux solutions principales supplémentaires (cas de la figure ci-contre) donc $\boxed{x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi}$



Exemple 4 :
L'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ revient à $\sin x = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, on en déduit que $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.