Transformations usuelles du plan

I. Généralités sur les transformations

Dans ce chapitre, nous travaillons dans un plan E (un espace à deux dimensions).

Définition
Une transformation est une application bijective de E dans E (tout point de E a une image unique et a un antécédent unique).

Notation : une transformation f admet une transformation réciproque notée f^{-1}, c'est-à-dire une transformation vérifiant : $M' = f(M) \Longleftrightarrow M = f^{-1}(M')$.

Exemple 1 : Si f est la translation de vecteur $\vec{u}$ alors f^{-1} est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Définition
Une **isométrie** est une transformation de E dans E qui conserve les distances.

Propriété 1

- *une isométrie conserve aussi les angles géométriques, les aires et les volumes ;*
- *pour toutes les transformations traitées dans ce chapitre (à l'exception des affinités) :*
  - *l'image d'un segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ où A' et B' sont les images respectives de A et de B ;*
  - *l'image d'une droite (AB) est la droite $(A'B')$ où A' et B' sont les images respectives de A et de B ;*
  - *l'image d'un cercle de centre K est un cercle de centre K' où K' est l'image de K ;*
  - *il y a conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, des angles géométriques et de la tangence.*

II. Translations

Définition
La translation de vecteur $\vec{u}$ transforme tout point M en le point M' tel que $\boxed{\overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$.

Exemple 2 : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Déterminez l'image de $A\ (0\,;\,3)$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.

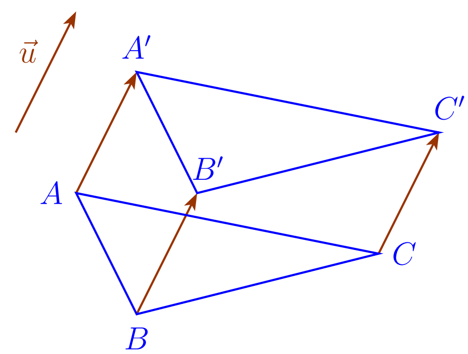
Réponse

Soit A' cette image. On a donc $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ donc $\begin{cases} x_{A'} - x_A = x_{\vec{u}} \\ y_{A'} - y_A = y_{\vec{u}} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_{A'} = -2 + 0 = -2 \\ y_{A'} = 1 + 3 = 4 \end{cases}$

donc $A'\ (-2\,;\,4)$.

Propriété 2
Une translation est une isométrie.

Exemple 3 : Sur la figure ci-contre, les triangles ABC et $A'B'C'$ ont les mêmes dimensions et donc la même aire.



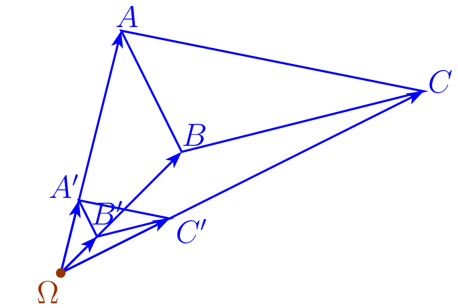
Propriété 3
Par une translation, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.

Exemple 4 : Soit (d) la droite d'équation $y = -3\,x + 11$.
Déterminez une équation de l'image de (d) par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.
Réponse : l'image de (d) est une droite (d') qui lui est parallèle ; elles ont donc le même coefficient directeur, à savoir -3 : l'équation réduite de (d') s'écrit donc $y = -3\,x + p$.
Comme (d) passe par $A\ (0\,;\,11)$, nous calculons les coordonnées de A', image de A et obtenons $(\ldots)$ $A'\ (-2\,;\,12)$.
La droite (d') passe donc par A' donc $y_{A'} = -3\,x_{A'} + p$, ce qui donne $p = y_{A'} + 3\,x_{A'} = 12 + 3 \times (-2) = 6$.
L'équation réduite de (d') est donc $y = -3\,x + 6$.

III. Homothéties

Définition
L'homothétie h de centre Ω et de rapport k (non nul) transforme tout point M en un point $M' = h(M)$ tel que $\boxed{\overrightarrow{\Omega M}' = k\,\overrightarrow{\Omega M}}$.

Exemple 5 :
J'ai représenté ci-contre un triangle ABC et son image $A'B'C'$ par l'homothétie h de centre Ω et de rapport $k = \dfrac{1}{3}$.



Exemple 6 : Soit h l'homothétie de centre $\Omega\ (2\,;\,-1)$ et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.
Déterminez l'image de $A\ (0\,;\,3)$ par h.
Réponse

Soit A' cette image. On a donc $\overrightarrow{\Omega A}' = k\,\overrightarrow{\Omega A} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega A}$ donc $\begin{cases} x_{A'} - x_\Omega = -\dfrac{1}{2}(x_A - x_\Omega) \\ y_{A'} - y_\Omega = -\dfrac{1}{2}(y_A - y_\Omega) \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_{A'} = -\dfrac{1}{2}(0-2) + 2 = 3 \\ y_{A'} = -\dfrac{1}{2}(3-(-1)) + (-1) = -3 \end{cases}$ donc $A'\ (3\,;\,-3)$.

Propriété 4
Soit h une homothétie de rapport k.
Si $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$ alors $\boxed{A'B' = |k| \times AB}$.

Remarques :
- une homothétie est un agrandissement si $|k| > 1$, une réduction si $|k| < 1$ et une isométrie si $|k| = 1$;
- une homothétie multiplie les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$;
- une homothétie ne conserve pas les longueurs (en général) mais conserve les angles géométriques.

Propriété 5
Par une homothétie, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.

EXEMPLE 7 : Soit (d) la droite d'équation $y = -3\,x + 11$.
Déterminez une équation de l'image de (d) par l'homothétie de centre $\Omega\ (2\,;\,-1)$ et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.
Réponse : l'image de (d) est une droite (d') qui lui est parallèle ; elles ont donc le même coefficient directeur, à savoir -3 : l'équation réduite de (d') s'écrit donc $y = -3\,x + p$.
Comme (d) passe par $A\ (0\,;\,11)$, nous calculons les coordonnées de A', image de A par h et obtenons $(\dots)\ A'\ (3\,;\,-7)$.
La droite (d') passe donc par A' donc $y_{A'} = -3\,x_{A'} + p$, ce qui donne $p = y_{A'} + 3\,x_{A'} = -7 + 3\times 3 = 2$.
L'équation réduite de (d') est donc $y = -3\,x + 2$.

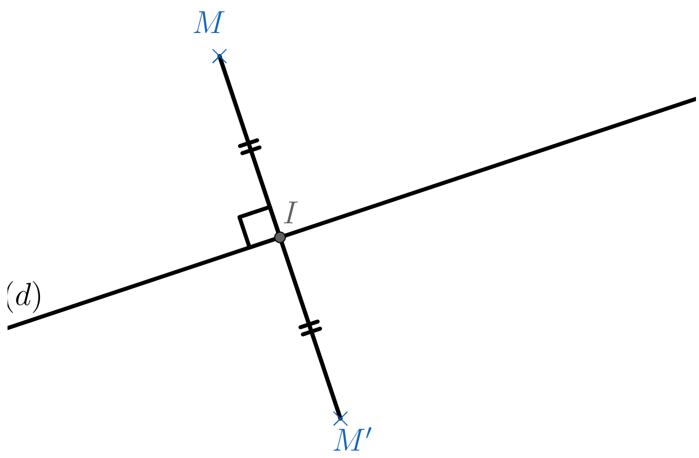
EXEMPLE 8 : Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A\ (0\,;\,11)$ et de rayon 4.
Déterminez une équation de l'image de $\mathscr{C}$ par l'homothétie de centre $\Omega\ (2\,;\,-1)$ et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.
Réponse : l'image du centre de $\mathscr{C}$ est celui de $\mathscr{C}'$.
Nous calculons les coordonnées de A', image de A par h et obtenons $(\dots)\ A'\ (3\,;\,-7)$.
Le rayon du cercle $\mathscr{C}$ est multiplié par $\left|-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ donc il devient $4\times\dfrac{1}{2} = 2$.
L'équation de $\mathscr{C}'$ est donc $(x-3)^2 + (y-(-7))^2 = 2^2$ donc $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 4$.

IV. Réflexions

Soit (d) une droite.

Définition
La réflexion (ou symétrie orthogonale) par rapport à la droite (d) transforme tout point M en un point M' tel que :
➡ le milieu I du segment $[MM']$ est sur (d) ;
➡ (MM') est perpendiculaire à(d).

Pour trouver l'image d'un point M :
$\boxed{1}$ chercher une équation de (MM') ;
$\boxed{2}$ en déduire les coordonnées de I ;
$\boxed{3}$ en déduire les coordonnées de M', en utilisant par exemple $\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{MI}$.



EXEMPLE 9 : Soit la droite (d) d'équation $y = 2x$.
Déterminez les coordonnées de l'image du point A de coordonnées $(-1\,;\,2)$ par la réflexion de droite (d).
Réponse :
$\boxed{1}$ Soit m le coefficient directeur de (d) et m' celui de (AA'). Comme $(AA')\perp(d)$, nous avons $mm' = -1$ donc $m' = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{2}$; l'équation de (AA') s'écrit donc $y = -\dfrac{1}{2}\,x + p$ et nous trouvons $p = \dfrac{3}{2}$ en utilisant les coordonnées de A donc $(AA') : y = -\dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{3}{2}$.

$\boxed{2}$ Soit I le milieu du segment $[AA']$. Alors $I = (AA')\cap(d)$ donc $\begin{cases} y_I = 2\,x_I \\ y_I = -\dfrac{1}{2}\,x_I + \dfrac{3}{2} \end{cases}$

ce qui donne $2\,x_I = -\dfrac{1}{2}\,x_I + \dfrac{3}{2}$ d'où $(\dots)$ $x_I = \dfrac{3}{5}$ puis $y_I = 2\,x_I = \dfrac{6}{5}$ donc $I\left(\dfrac{3}{5}\,;\,\dfrac{6}{5}\right)$.

$\boxed{3}$ Enfin, nous avons $\overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{AI}$ donc $\left\{\begin{array}{l} x_{A'} - x_I = x_I - x_A \\ y_{A'} - y_I = y_I - y_A \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{l} x_{A'} = 2x_I - x_A = \dfrac{6}{5} - (-1) \\ \\ y_{A'} = 2y_I - y_A = \dfrac{12}{5} - 2 \end{array}\right.$.

Conclusion : $A'\left(\dfrac{11}{5}\,;\,\dfrac{2}{5}\right)$.

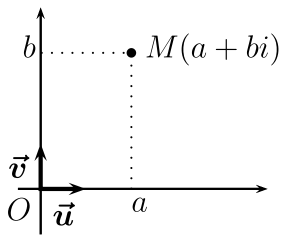
Remarque : Certaines symétries se font de façon plus simple.
Par exemple la symétrie par rapport à l'axe des y transforme un point de coordonnées $(x\,;\,y)$ en le point de coordonnées $(-x\,;\,y)$.
Nous dirons alors que cette symétrie a pour écriture analytique : $\left\{\begin{array}{l} x' = -x \\ y' = y \end{array}\right.$.

V. Rotations dans le plan

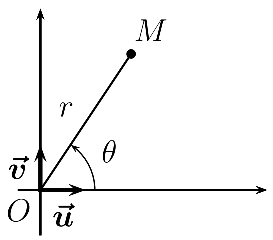
1) Les trois formes d'un nombre complexe

a) Définition et représentation graphique

- ➡ On admet l'existence d'un nombre i (notation dûe à Euler) tel que $\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$.
- ➡ Un nombre tel que, par exemple, $z = -2 + 3\mathrm{i}$ est un nombre complexe écrit sous la **forme algébrique** : $\boxed{z = a + b\mathrm{i}}$ (avec a et b réels).
- ➡ À tout nombre complexe $z = a + b\mathrm{i}$ correspond un point M de coordonnées $(a\,;\,b)$.



  On dit que z est l'**affixe** de M, qu'on notera z_M.
- ➡ Ce point peut également être défini par une distance r et un angle θ.



b) Forme trigonométrique

Propriété 6
On démontre aisément que :

$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$ $\qquad$ $\boxed{a = r\cos\theta}$ $\qquad$ $\boxed{b = r\sin\theta}$

On en déduit la propriété suivante;

Propriété 7
Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme trigonométrique $\boxed{z = r\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}$.

Remarque : cette écriture est aussi valable pour 0, en écrivant $0 = 0\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ (où θ est quelconque).

c) Forme exponentielle

Le nombre $\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)$ est noté $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ donc tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme exponentielle $\boxed{z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

EXEMPLE 10 : Si $z = 3\mathrm{i}$ alors $r = 3$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ donc $z = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

EXEMPLE 11 : On a $4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$.

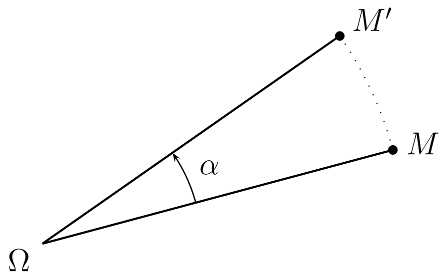
EXEMPLE 12 : Si $z = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ alors (...) $r = 2$ et $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ donc $z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}-\frac{\pi}{3}}$.

Remarque : quelques cas à retenir : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$.

2) Rotations autour d'un point

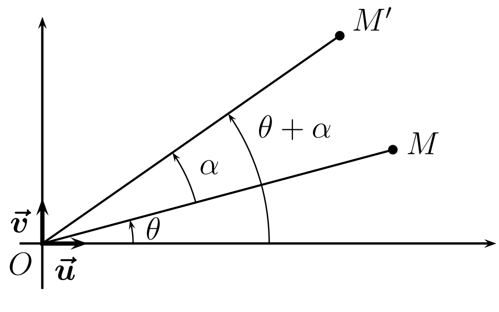
a) Définition

Soit α un réel et Ω un point. La rotation de centre Ω et d'angle α transforme un point M en le point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha$.



b) Rotations autour de O

Soit M un point d'affixe $z_M = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Soit M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle α et $z_{M'}$ le complexe associé à M'.



Alors M' est défini par la distance r et par l'angle $\theta + \alpha$ donc $z_{M'} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\alpha)} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = z_M \boxed{\times\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}$.

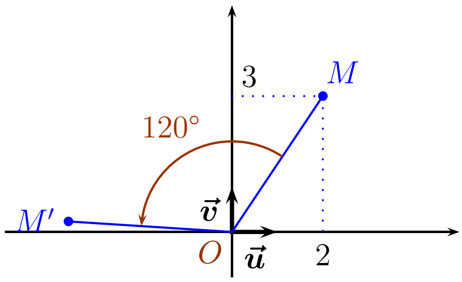
Propriété 8
Pour faire tourner un point M d'un angle α autour du point O, il suffit de multiplier z_M par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ (donc par $\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$).

Exemple 13 :
Déterminez les coordonnées de A', image de A $(2\,;\,3)$ par la rotation de centre O et d'angle 120°.

Réponse

$$\begin{aligned} z_{A'} &= z_A \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = (2+3\,\mathrm{i}) \times (\cos 120° + \mathrm{i}\,\sin 120°) \\ &= (2+3\,\mathrm{i}) \times \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\,\mathrm{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}^2 \\ &= \left(-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion : $A'\left(-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,;\ \sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) \simeq (-3{,}598\,;\ 0{,}232)$.



c) Rotations autour d'un point quelconque

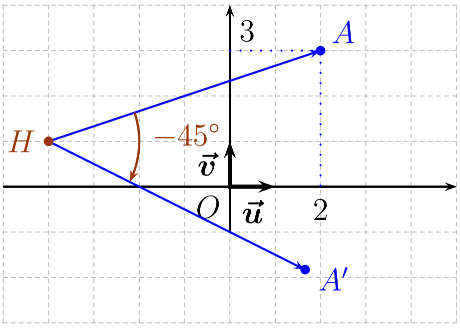
Si on veut faire tourner d'un angle α un point A autour d'un point H, on considère qu'on fait tourner le vecteur $\overrightarrow{HA}$ pour obtenir le vecteur $\overrightarrow{HA'}$:

- ➡ on calcule l'affixe du vecteur $\overrightarrow{HA}$, qui est égale à $z_A - z_H$;
- ➡ on la multiplie par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$, cela donnera l'affixe du vecteur $\overrightarrow{HA'}$, qui est égale à $z_{A'} - z_H$;
- ➡ on en déduit $z_{A'}$.

Exemple 14 :
Déterminez les coordonnées de A', image de A $(2\,;\,3)$ par la rotation de centre H $(-4\,;\,1)$ et d'angle $-45°$.

Réponse

- ➡ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{HA}$ est $z_A - z_H = (2+3\,\mathrm{i}) - (-4+1\,\mathrm{i}) = 6+2\,\mathrm{i}$ (vérifiez : le vecteur $\overrightarrow{HA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$) ;
- ➡ on multiplie par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-45°)} = \cos(-45°) + \mathrm{i}\sin(-45°)$ pour trouver l'affixe du vecteur $\overrightarrow{HA'}$:
$$\begin{aligned} z_{A'} - z_H &= (z_A - z_H) \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = (6+2\,\mathrm{i}) \times (\cos(-45°) + \mathrm{i}\sin(-45°)) \\ &= (6+2\,\mathrm{i}) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right) \\ &= 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,\mathrm{i} + \sqrt{2}\,\mathrm{i} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}^2 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}. \end{aligned}$$
- ➡ $z_{A'} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{i} + z_H = \left(4\sqrt{2} - 4\right) + \mathrm{i}\left(-2\sqrt{2} + 1\right)$.
  Conclusion : $A'\left(4\sqrt{2} - 4\,;\ -2\sqrt{2} + 1\right) \simeq (1{,}657\,;\ -1{,}828)$.



VI. Affinités orthogonales

À venir…