Sphères, droites et plans dans l'espace

I. Sphères

1) Définition et équation

La sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = r$.

Propriété 1

Une sphère de centre $\Omega\,(x_\Omega\,;\,y_\Omega\,;\,z_\Omega)$ *et de rayon* r *a pour équation*

$$\boxed{(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=r^2}.$$

2) Cas des cercles dans l'espace

L'équation $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=r^2$ n'est pas, dans l'espace, l'équation d'un cercle (z n'y apparaissant pas, il est quelconque donc on obtient un cylindre).

Il n'y a pas d'équation de cercle simple dans l'espace ; sauf si on travaille dans un plan d'équation $z=k$ ou $y=k$ ou $x=k$.

Comment prouver qu'une courbe de l'espace est un cercle : il faut prouver que cette courbe est l'intersection d'un plan et d'une sphère sécants.

II. Droites de l'espace

1) Représentations paramétriques d'une droite

Soient une droite (Δ) de l'espace, A un point de (Δ) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ). Un point $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à (Δ) s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$. On en déduit la propriété suivante.

Propriété 2

$M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ *appartient à* (Δ) *si et seulement s'il existe un nombre* t *tel que*

$$\begin{cases} x = x_A + t.X_{\vec{u}} \\ y = y_A + t.Y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t.Z_{\vec{u}} \end{cases}$$

Ces équations forment une représentation paramétrique de la droite (Δ).

Remarque : comme on peut parfois prendre différents points sur la droite et différents vecteurs directeurs, il y a une infinité de représentations paramétriques pour une droite donnée.

Exemple 1 : Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par $P\,(-1\,;\,3\,;\,0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}$.

Réponse :

(d) a pour représentation paramétique : $\begin{cases} x = x_P + t\,X_{\vec{v}} = -1+6\,t \\ y = y_P + t\,Y_{\vec{v}} = 3 \\ z = z_P + t\,Z_{\vec{v}} = 2\,t \end{cases}$

Exemple 2 : Trouver un vecteur directeur et deux points de la droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5+t \\ y = 2-t \\ z = 4-3\,t \end{cases}$.

Réponse :

D'après la propriété 2, les coefficients de t donnent les coordonnées d'un vecteur directeur donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ).

À chaque valeur de t correspond un point. Par exemple, pour $t=0$: $\begin{cases} x = 5+0 = 5 \\ y = 2-0 = 2 \\ z = 4-3\times 0 = 4 \end{cases}$ et pour $t=1$: $\begin{cases} x = 5+1 = 6 \\ y = 2-t = 2-1 = 1 \\ z = 4-3\,t = 4-3\times 1 = 1 \end{cases}$

donc $A\,(5\,;\,2\,;\,4)$ et $B\,(6\,;\,1\,;\,1)$ sont deux des points de (d).

Remarque : je peux aussi calculer maintenant calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, qui sera un vecteur directeur de (Δ).

Exemple 3 : Le point $K\ (3\,;\,1\,;\,2)$ appartient-il à la droite (Δ) ?

Réponse : il faut que les coordonnées de K soient compatibles avec la représentation paramétrique de la droite (Δ) donc qu'il existe une valeur de t telle que $\begin{cases} x = 5+t = 3 \\ y = 2-t = 1 \\ z = 4-3\,t = 2 \end{cases}$.

La première égalité donne $t=3-5=-2$, je remplace dans la deuxième : $2-(-2)=4\neq 1$ donc il n'y a aucune valeur de t correspondant à K : le point K n'appartient pas à la droite (Δ) (inutile de vérifier avec la troisième égalité dans la mesure où les deux premières font apparaître un problème).

Exemple 4 :
Soient $E\,(-2\,;\,0\,;\,3)$ et $F\,(1\,;\,-1\,;\,3)$. Donner une représentation paramétrique de la droite (EF).

Réponse : $\vec{u} = \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ étant un vecteur directeur de la droite (EF), elle a pour représentations paramétiques : $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = -t \\ z = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1-t \\ z = 3 \end{cases}$.
La dernière égalité montre que la droite est dans le plan d'équation $z = 3$.

Exemple 5 : Soient $G\,(0\,;\,-4\,;\,2)$.
Déterminez les coordonnées du point G', projeté orthogonal du point G sur la droite (EF) précédente. En déduire la distance entre G et la droite (EF).

Réponse : $G' \in (EF)$ donc $\begin{cases} x_{G'} = -2+3t \\ y_{G'} = -t \\ z_{G'} = 3 \end{cases}$

$(GG') \perp (EF)$ donc $\overrightarrow{EF}\,.\,\overrightarrow{GG'} = 0$,
or $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GG'}\begin{pmatrix}x_{G'}\\y_{G'}+4\\z_{G'}-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+3t\\-t+4\\1\end{pmatrix}$,
donc $\overrightarrow{EF}\,.\,\overrightarrow{GG'} = 3(-2+3t) - 1(-t+4) + 0(1) = 0$ donc $10t - 10 = 0$ d'où $t = 1$ et $\begin{cases} x_{G'} = -2+3 = 1 \\ y_{G'} = -1 \\ z_{G'} = 3 \end{cases}$ donc $G'\,(1\,;\,-1\,;\,3)$.
La distance entre G et la droite (EF) est donc :
$GG' = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-(-4))^2 + (3-2)^2} = \sqrt{11}$.

Remarque : nous avons vu dans le chapitre sur le produit vectoriel comment calculer cette distance avec le produit vectoriel et le calcul de l'aire du triangle EFG.

2) Positions relatives de deux droites de l'espace

Remarques :
- dans l'espace, deux droites peuvent ni parallèles, ni sécantes ;
- nous pouvons savoir si deux droites sont parallèles ou orthogonales grâce à leurs vecteurs directeurs ;
- l'exemple 7 montre comment trouver si deux droites sont sécantes et comment trouver les coordonnées de leur point d'intersection.

Exemple 6 : Prouver que les droites (d) et (Δ) sont orthogonales.
Réponse : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 6 + (-1)\times 0 + (-3)\times 2 = 0$
d'où $\vec{u} \perp \vec{v}$ donc $(d) \perp (\Delta)$.

Exemple 7 : Les droites (d_1) : $\begin{cases} x = 6+5t \\ y = -1-3t \\ z = 5+3t \end{cases}$ et (d_2) : $\begin{cases} x = 2+6t \\ y = 9+4t \\ z = 1+4t \end{cases}$ sont-elles parallèles ? sécantes ?

Réponses : les vecteurs directeurs $\vec{u_1}\begin{pmatrix}5\\-3\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $6 \div 5 \neq 4 \div (-3)$ (du coup pas besoin de vérifier pour les 3^{es} coordonnées) donc (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.
Pour qu'elles soient sécantes, il faut que leurs représentations paramétriques soient compatibles donc qu'il existe t et t' tels que : $\begin{cases} x = 6+5t = 2+6t' \\ y = -1-3t = 9+4t' \\ z = 5+3t = 1+4t' \end{cases}$.

Résolvons ce système : $\begin{cases} 6+5t = 2+6t' \\ -1-3t = 9+4t' \end{cases} \iff \begin{cases} 18+15t = 6+18t' \\ -5-15t = 45+20t' \end{cases}$
donc $13 = 51+38t'$ d'où $t' = (13-51)\div 38 = -1$ puis je remplace t' par -1 : $6+5t = 2+6\times(-1) = -4$ d'où $t = (-4-6)\div 5 = -2$.
Il ne reste plus qu'à regarder si ces valeurs de t et t' sont compatibles avec la troisième égalité : $5+3t = 5+3\times(-2) = -1$ et $1+4t' = 1+4\times(-1) = -3$ donc $5+3t \neq 1+4t'$: les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes.

III. Plans

1) Équations d'un plan

Propriété 3

Tout plan a une équation de la forme

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

où a, b, c, d sont des constantes.

Remarques :

– l'ensemble des points vérifiant $ax+by+c=0$ est, dans l'espace, un plan et pas une droite ! Dans cette équation, le coefficient de z est 0 donc z est quelconque (quand une coordonnée n'apparait pas dans l'équation d'un plan, elle n'est pas forcément nulle !) ; le plan est parallèle à l'axe des z.
– plans de coordonnées : $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$: $z=0$; $(O;\vec{\jmath},\vec{k})$: $x=0$; $(O;\vec{\imath},\vec{k})$: $y=0$.

EXEMPLE 8 : $x-y=0$ est l'équation d'un plan, obtenu en faisant glisser la droite d'équation $x-y=0$, « verticalement ».

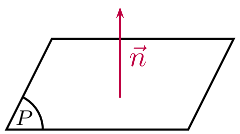
➀ *Comment projeter orthogonalement sur un des "plans de coordonnées" :* il suffit d'annuler une des coordonnées.

EXEMPLE 9 :
Soit $A\,(-1\,;\,4\,;\,2)$ et A' le projeté orthogonal de A sur le plan $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{k})$ (le plan d'équation $y=0$). Alors les coordonnées de A' sont $(-1\,;\,0\,;\,2)$.

2) Vecteur normal à un plan

Définition

On dit qu'un vecteur est normal à un plan s'il est orthogonal à tout vecteur formé par des points du plan.



Propriété 4

Si un plan (P) a pour équation $ax+by+cz+d=0$ alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal pour (P).

Remarque :

Un vecteur normal indique l'« inclinaison » du plan ; il est aussi un bon outil pour étudier la position relative de plusieurs plans.

EXEMPLE 10 : Soient (Σ) la sphère de centre $\Omega\,(2\,;\,-1\,;\,4)$ et passant par $E\,(4\,;\,-3\,;\,-4)$. Déterminer une équation du plan (P) tangent à (Σ) en E.
Réponse :
– (P) est perpendiculaire au rayon $[\Omega E]$;
– $\overrightarrow{\Omega E}\begin{pmatrix}2\\-2\\-8\end{pmatrix}$ est donc normal à ce plan donc $\vec{n}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\Omega E}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ aussi ;
– une équation de (P) s'écrit donc $-x+y+4z+d=0$;
– comme $E\in(P)$: $-x_E+y_E+4z_E+d=0$ d'où $d=23$ donc une équation de (P) s'écrit $-x+y+4z+23=0$.

3) Equation d'un plan passant par trois points connus

➀ *Comment trouver l'équation d'un plan passant par trois points :* résoudre un système d'équation ou utiliser le produit vectoriel pour trouver un vecteur normal.

EXEMPLE 11 : Soient $I\,(1\,;\,0\,;\,0)$, $J\,(0\,;\,1\,;\,0)$ et $K\,(0\,;\,0\,;\,1)$.
Déterminer une équation du plan (IJK).
Réponse :
Le plan (IJK) a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.
En remplaçant x, y, z par les coordonnées de I, J et K, on obtient le système :

$$\begin{cases}a+d=0\\b+d=0\\c+d=0\end{cases}\quad\text{d'où il vient que } a=-d \text{ et que } a=b=c.$$

On choisit alors $d=-1$, ce qui donne $a=b=c=1$ donc (IJK) a pour équation $x+y+z=1$.

Remarques :

– cette méthode s'applique bien car les coordonnées comportent beaucoup de zéros ;
– il faut forcément choisir un des coefficients a, b, c ou d, s'il est non nul.

Exemple 12 : Soient $A\,(-1\,;\,-3\,;\,2)$, $B\,(1\,;\,-3\,;\,-1)$ et $C\,(-2\,;\,5\,;\,1)$.
Déterminer une équation du plan (ABC).
Réponse :
Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, qui ne sont pas colinéaires donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\8\\-1\end{pmatrix}$ d'où $(\dots)$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}24\\5\\16\end{pmatrix}$.

$24x+5y+16z+d=0$ est donc une équation du plan (ABC), on trouve d en remplaçant x, y, z par les coordonnées d'un point du plan (par exemple : A) ; on trouve $d=7$, l'équation est donc $24x+5y+16z+7=0$.

4) Équation normale d'un plan

Définition
Une équation de plan $ax+by+cz+d=0$ est dite **normale** si $a^2+b^2+c^2=1$.

Remarque : un avantage des équations normales est que si M est un point de coordonnées $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ alors la distance du point M au plan (P) d'équation $ax+by+cz+d=0$ est égale à $|ax_0+by_0+cz_0+d|$.

Exemple 13 : Trouver une équation normale du plan (ABC) de l'exemple 7 puis la distance entre $D\ (5\,;\,4\,;\,3)$ et (ABC).

Réponses :
① on reprend une équation cartésienne de (ABC) : $24x+5y+16z+7=0$.

② on regarde si c'est déjà une équation normale (en général, non…) :
$a^2+b^2+c^2=24^2+5^2+16^2=857\neq 1$.

③ on normalise l'équation en la divisant par $\sqrt{857}$: une équation normale de (ABC) est donc $\dfrac{24}{\sqrt{857}}x+\dfrac{5}{\sqrt{857}}y+\dfrac{16}{\sqrt{857}}z+\dfrac{7}{\sqrt{857}}=0$.

(on peut remarquer qu'alors $a^2+b^2+c^2=\cdots=1$)

④ on en déduit que la distance exacte entre D et (ABC) est :
$$\left|\frac{24}{\sqrt{857}}\times 5+\frac{5}{\sqrt{857}}\times 4+\frac{16}{\sqrt{857}}\times 3+\frac{7}{\sqrt{857}}\right|=\frac{195}{\sqrt{857}}\simeq 6{,}66.$$

IV. Exemples d'intersections

Exemple 14 :
Soient les plans (P) et (P') d'équations respectives $x-2y+3z-1=0$ et $2x-y+z+3=0$. Vérifier que (P) et (P') sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

Réponse : les vecteurs normaux $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles) donc les plans sont sécants.

On élimine z (par exemple) des deux équations (multiplier l'équation de (P') par 3 puis soustraire), on trouve : $-5x+y-10=0$ donc $y=5x+10$. En remplaçant, on obtient $z=3x+7$.

Donc, si on pose $x=t$, on trouve $\begin{cases}x=t\\y=5t+10\\z=3t+7\end{cases}$

Exemple 15 : Trouver les coordonnées du projeté orthogonal du point $A\ (-1\,;\,2\,;\,1)$ sur le plan (P) d'équation $2x-3y+z-5=0$.
Réponse : appelons (Δ) la droite perpendiculaire à (P) et passant par A et A' le projeté orthogonal de A sur (P).

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (P) donc directeur pour (Δ) donc

(Δ) : $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-3t\\z=1+t\end{cases}$. A' vérifie $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-3t\\z=1+t\\2x-3y+z-5=0\end{cases}$

d'où $2(-1+2t)-3(2-3t)+(1+t)-5=0$ ce qui donne $t=\dfrac{6}{7}$ donc $x=-1+2\times\dfrac{6}{7}=\dfrac{5}{7}$; $y=2-3\times\dfrac{6}{7}=-\dfrac{4}{7}$; $z=1+\dfrac{6}{7}=\dfrac{13}{7}$.

Conclusion : $A'\left(\dfrac{5}{7}\,;\,-\dfrac{4}{7}\,;\,\dfrac{13}{7}\right)$. (on peut facilement en déduire la distance entre A et (P), à savoir AA'.)

EXEMPLE 16 :
Soient $A\ (-7\,;\,6\,;\,13)$ et $B\ (8\,;\,-9\,;\,-7)$.
Trouver les coordonnées du ou des points d'intersection de la droite (AB) et de la sphère de centre $C\ (2\,;\,0\,;\,3)$ et de rayon $\sqrt{13}$.

Réponse :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}15\\-15\\-20\end{pmatrix}$ est directeur pour (AB) donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\3\\4\end{pmatrix}$ aussi ; cette droite a pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=-7-3t\\y=6+3t\\z=13+4t\end{cases}$.

Les points d'intersection vérifient donc $\begin{cases}x=-7-3t\\y=6+3t\\z=13+4t\\(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=13\end{cases}$

d'où $(-7-3t-2)^2+(6+3t)^2+(13+4t-3)^2=13$ ce qui donne $(-9-3t)^2+(6+3t)^2+(10+4t)^2-13=0$ d'où, en développant (...) $34t^2+170t+204=0$ qui a pour solutions (...) $t=-3$ et $t=-2$ donc $x=-7-3\times(-3)=2$; $y=6+3\times(-3)=-3$; $z=13+4\times(-3)=1$ ou $x=-7-3\times(-2)=-1$; $y=6+3\times(-2)=0$; $z=13+4\times(-2)=5$
Conclusion : il y a deux points d'intersection : $D\ (2\,;\,-3\,;\,1)$ et $E\ (-1\,;\,0\,;\,5)$.

À retenir

Équation d'une sphère :

$$\boxed{(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=r^2}.$$

Représentation paramétrique d'une droite (Δ) :

$$\begin{cases}x=x_A+t.X_{\vec{u}}\\y=y_A+t.Y_{\vec{u}}\\z=z_A+t.Z_{\vec{u}}\end{cases}$$

où A est un point de (Δ) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ).

Équation cartésienne d'un plan (P) :

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

où A est un point de (Δ) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (Δ).

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal pour (P).