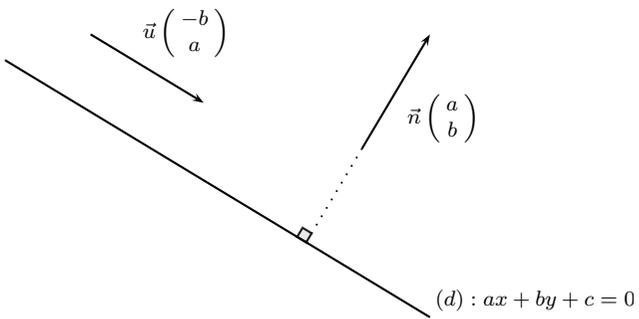


Équations de droites et de cercles dans le plan

I. Équations d'une droite dans le plan

1) Équations cartésiennes d'une droite

Propriétés 1



Toute droite (d) du plan a une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + c = 0$.

Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de (d) et le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un **vecteur normal** de (d) .

EXEMPLE 1 : Donner une équation de la droite (AB) où $A(2; -1)$ et $B(4; 2)$.

Réponse : Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A = 2 \\ y_B - y_A = 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) donc une équation de (AB) s'écrit (puisque $-b = 2$ et $a = 3$) : $3x - 2y + c = 0$. En remplaçant x et y par les coordonnées de A , on trouve $c = -8$ donc (AB) a pour équation $3x - 2y - 8 = 0$.

EXEMPLE 2 : Donner une équation de la droite (d) perpendiculaire à (AB) passant par $C(-3; 7)$.

Réponse : Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite (d) donc une équation de (d) s'écrit (puisque $a = 2$ et $b = 3$) :

$2x + 3y + c = 0$. En remplaçant x et y par les coordonnées de C , on trouve $c = -15$ donc (d) a pour équation $2x + 3y - 15 = 0$.

EXEMPLE 3 :

Trouver les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (d) .

On résout le système :
$$\begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 2x + 3y - 15 = 0 \end{cases}$$

on multiplie la première équation par 3 et la seconde par 2 :

$$\begin{cases} 9x - 6y - 24 = 0 \\ 4x + 6y - 30 = 0 \end{cases}$$
 d'où, en ajoutant les deux lignes : $9x + 4x - 54 = 0$ donc

$x = \frac{54}{13}$ puis $3 \times \frac{54}{13} - 2y - 8 = 0$ donne (...) $y = \frac{29}{13}$. Donc les coordonnées

du point d'intersection de (AB) et (d) sont $\left(\frac{54}{13}; \frac{29}{13}\right)$.

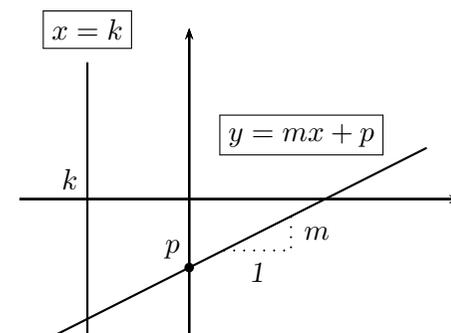
2) Équation réduite d'une droite

Propriété 2

L'équation $ax + by + c = 0$ peut s'écrire, selon les cas, sous l'une des deux formes **réduites** suivantes :

$y = mx + p$ ou $x = k$.

Le coefficient m est le **coefficient directeur** de la droite et p est son **ordonnée à l'origine** (ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées).



Propriétés 3 (Coefficient directeur d'une droite (AB))

Si l'équation de (AB) s'écrit $y = mx + p$ alors $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

($\Delta y = m \cdot \Delta x$ donc $\Delta y = m$ si $\Delta x = 1$). De plus, $m = \tan \theta$ où θ est l'angle avec l'horizontale.

EXEMPLE 4 :

Soient $C(-3; 7)$ et $D(-3; 5)$. Donner l'équation réduite de la droite (CD) puis celle de la droite (AB) de l'exemple précédent.

Réponses : $x_C = x_D = -3$ donc l'équation de (CD) est $x = -3$.

Pour (AB) :

- on calcule le coefficient directeur $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{2}$
- l'équation réduite s'écrit donc $y = \frac{3}{2}x + p$
- pour trouver p , on remplace x et y par les coordonnées de A (ou de B) : $-1 = \frac{3}{2} \times 2 + p$ donc $p = -4$.
- l'équation réduite de la droite (AB) est $y = \frac{3}{2}x - 4$ (ce qui est équivalent à $3x - 2y - 8 = 0$).

Propriétés 4

Soient (d) et (d') deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

Alors : $(d) // (d') \iff m = m'$ et $(d) \perp (d') \iff mm' = -1$.

EXEMPLE 5 : (Re) Trouver les équations des droites (Δ) et (d) respectivement parallèles et perpendiculaires à (AB) et passant par le point C .

Réponses :

Nous savons que l'équation réduite de (AB) est $y = \frac{3}{2}x - 4$ donc son coefficient directeur est $m = \frac{3}{2}$.

Soit m' le coefficient directeur de (Δ) .

$(\Delta) // (AB)$ donc $m' = \frac{3}{2}$. L'équation de (Δ) est $y = \frac{3}{2}x + p$. Avec le point C , on trouve $p = \frac{23}{2}$ donc $(\Delta) : y = \frac{3}{2}x + \frac{23}{2}$.

Soit m'' le coefficient directeur de (d) .

$(d) \perp (AB)$ donc $\frac{3}{2} \times m'' = -1$ d'où $m'' = -\frac{2}{3}$. L'équation de (d) est $y = -\frac{2}{3}x + p$. Avec le point C , on trouve $p = 5$ donc $(d) : y = -\frac{2}{3}x + 5$ (équation équivalente à $2x + 3y - 15 = 0$).

EXEMPLE 6 :

Trouver les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (d) .

On résout le système :

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 4 \\ y = -\frac{2}{3}x + 5 \end{cases} \text{ qui donne : } \frac{3}{2}x - 4 = -\frac{2}{3}x + 5 \text{ donc (multiplier par 6) :}$$

$9x - 24 = -4x + 30$ d'où $x = \frac{54}{13}$ puis $y = \frac{3}{2} \times \frac{54}{13} - 4 = \frac{29}{13}$. Donc les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (d) sont $\left(\frac{54}{13}; \frac{29}{13}\right)$.

II. Équation d'un cercle dans le plan

1) Équation d'un cercle dans le plan

Soit Ω un point de coordonnées $(a; b)$ et R un réel positif.

Le cercle C de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = R$. Donc $M(x; y) \in C \iff \Omega M^2 = R^2 \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Propriété 5

Le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R a pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

2) Intersection avec une droite ou un cercle

a) Résolution dans \mathbb{R} des équations du second degré

Ce sont des équations qui peuvent s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Propriété 6

Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, on calcule le discriminant

$\Delta = b^2 - 4ac$. Il y a alors trois cas :

$\Delta < 0$: l'équation n'a pas de solution réelle.

$\Delta = 0$: l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une solution unique,

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

$\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

b) Intersection d'un cercle et d'une droite

EXEMPLE 7 : Soit le cercle (C) de centre $\Omega(2; 3)$ et de rayon $R = 4$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (d) d'équation $y = 2x + 1$ et du cercle (C) .

Réponses : On doit résoudre le système :
$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2 \end{cases}$$
 qui donne $(x - 2)^2 + (2x + 1 - 3)^2 = 16$ donc $(x - 2)^2 + (2x - 2)^2 = 16$ d'où $5x^2 - 12x - 8 = 0$. Cette équation a pour solutions $x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{19}}{5}$ et $x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{19}}{5}$.

Comme $y = 2x + 1$, on trouve $y_1 = \frac{17 - 4\sqrt{19}}{5}$ et $y_2 = \frac{17 + 4\sqrt{19}}{5}$.

c) Intersection de deux cercles

Propriété 7

Soient deux cercles (C) et (C') de centres et de rayons respectifs Ω, R et Ω', R' . Alors (C) et (C') sont sécants ssi $|R - R'| < \Omega\Omega' < R + R'$.

EXEMPLE 8 : On donne $\Omega(-3; 4)$, $R = 4$, $\Omega'(2; -1)$, $R' = 5$. Démontrer que les deux cercles (C) et (C') sont sécants puis déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection.

Réponses : On calcule la distance entre les deux centres : $\Omega\Omega' = \sqrt{50}$. Comme $|R - R'| = 1 = \sqrt{1}$ et $R + R' = 9 = \sqrt{81}$, on a bien $|R - R'| < \Omega\Omega' < R + R'$ donc (C) et (C') sont sécants.

On doit résoudre le système :
$$\begin{cases} (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4^2 \\ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5^2 \end{cases}$$

On développe :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0 \end{cases}$$

d'où, en soustrayant les deux lignes : $10x - 10y + 29 = 0$ d'où $y = x + 2,9$.

On arrive donc à :
$$\begin{cases} y = x + 2,9 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0 \end{cases}$$

qui donne (...) $2x^2 + 3,8x - 5,79 = 0$. Cette équation a pour solutions $x_1 = \frac{-19 - 7\sqrt{31}}{20}$ et $x_2 = \frac{-19 + 7\sqrt{31}}{20}$.

Après avoir vérifié ces valeurs sur un graphique, on cherche y .

Comme $y = x + 2,9$, on trouve $y_1 = \frac{39 - 7\sqrt{31}}{20}$ et $y_2 = \frac{39 + 7\sqrt{31}}{20}$.

3) Reconnaître une équation de cercle

L'objectif est ici de savoir si une équation donnée est celle d'un cercle, et, dans l'affirmative, de donner son centre et son rayon.

Pour cela, remarquons que :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \iff x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2 \iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

EXEMPLE 9 :

Vérifier que $x^2 + y^2 - 4x + y + 3 = 0$ est l'équation d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Réponse :

En comparant $x^2 + y^2 - 4x - y + 3 = 0$ avec $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$ on voit que :

$$-2a = -4 \text{ donc } a = 2;$$

$$-2b = 1 \text{ donc } b = -1/2;$$

$$a^2 + b^2 - R^2 = 3 \text{ donc } R^2 = a^2 + b^2 - 3 = 4 + 1/4 - 3 = 5/4 \text{ donc } R = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$x^2 + y^2 - 4x + y + 3 = 0 \iff (x - 2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} : \text{l'équation est bien}$$

celle d'un cercle, de centre $\Omega\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.