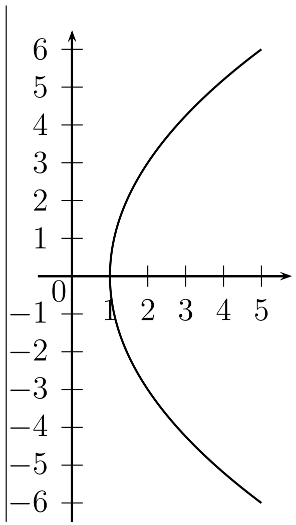
Courbes paramétrées du plan

I. Définitions et exemples

Une courbe paramètrée Γ est définie par la donnée de deux fonctions coordonnées x et y définies sur un intervalle I. La variable est généralement notée t et est appelé **paramètre** (on pourra penser au temps). Le point de la courbe Γ associé à une valeur de t, donc de coordonnées $(x(t); y(t))$ dans un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$, est noté $M(t)$.

Exemple 1 :
Soit Γ la courbe de représentation paramètrique $x(t) = 1+t^2$ et $y(t) = 3t$ avec $t \in [-2\ ;\ 2]$. Pour tracer la courbe Γ, on peut commencer par étudier les variations des fonctions x et y.

t	-2		0		2
$x'(t)$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	5
$y'(t)$			$+$		
$y(t)$	-6		$\nearrow$		6



et on précise le tracé en faisant un tableau de valeurs :

t	-2	-1	0	1	2
$x(t)$	5	2	1	2	5
$y(t)$	-6	-3	0	3	6

Remarque :
• Une courbe admet une infinité de représentations paramètriques. Dans l'exemple précédent, la courbe aurait également pu être représentée par $x(u) = 1+\dfrac{u^2}{9}$ et $y(u) = u$ avec $u \in [-6\ ;\ 6]$ (en posant $u = 3t$).

• Une courbe de fonction, d'équation $y = f(x)$ (ou $x = f(y)$) peut être considérée comme une courbe paramètrée (il suffit de poser $x = t$ et $y = f(t)$!).

II. Réduction de l'ensemble d'étude

1) Symétries (parités)

Il est possible parfois de réduire l'ensemble de définition en utilisant des symétries. Pour cela, il peut être utile de regarder si les deux fonctions x et y « ont une parité » (paire ou impaire).

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I centré en 0.

f est paire si pour tout t de I on a $\boxed{f(-t) = f(t)}$;

f est impaire si pour tout t de I on a $\boxed{f(-t) = -f(t)}$.

Exemple 1 : $x(-t) = 1+(-t)^2 = 1+t^2 = x(t)$ donc la fonction x est paire ; $y(-t) = 3(-t) = -3t = -y(t)$ donc y est impaire.
Soient M et N les points associés aux paramètres t et $-t$. Alors $x_N = x_M$ et $y_N = -y_M$ donc M et N sont symétriques par rapport à $(O, \vec{\imath})$ quel que soit t donc la courbe est symétrique par rapport à $(O, \vec{\imath})$.

Propriété 1 (cas de symétrie)

— *(x est paire et y impaire) $\Rightarrow$ Γ symétrique par rapport à $(O, \vec{\imath})$.*
— *(x est impaire et y paire) $\Rightarrow$ Γ symétrique par rapport à $(O, \vec{\jmath})$.*
— *(x et y sont impaires) $\Rightarrow$ Γ symétrique par rapport à O.*

Remarques :
• Si x et y sont paires alors $M(-t) = M(t)$ (pas de symétrie).
• La parité d'une fonction permet de réduire l'ensemble d'étude. Dans l'exemple 1, la partie de la courbe correspondant aux valeurs de t appartenant à $[-2\ ;\ 0]$ est le symétrique de la partie de la courbe correspondant aux valeurs de t appartenant à $[0\ ;\ 2]$. On peut donc se borner à étudier les fonctions sur $[0\ ;\ 2]$.
• Une fonction peut être ni paire, ni impaire. Par exemple, si $f(t) = t+2$ alors $f(1) = 3$ et $f(-1) = 1$ n'est ni égal, ni opposé à $f(1)$.
• À retenir : cos est paire et sin est impaire.

2) Répétition (périodicité)

Définition

On dit qu'une fonction f définie sur I est périodique de période T si $\boxed{f(t+T)=f(t)}$ pour tout t de I.

Pour connaître le comportement d'une fonction périodique de période T, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle d'amplitude T.

Remarque : on retiendra que cos et sin sont périodiques de période 2π (et que tan est périodique de période π).

Exemple 2 :

Courbe définie par $\begin{cases} x(t)=\sin(t) \\ y(t)=\sin(2t) \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

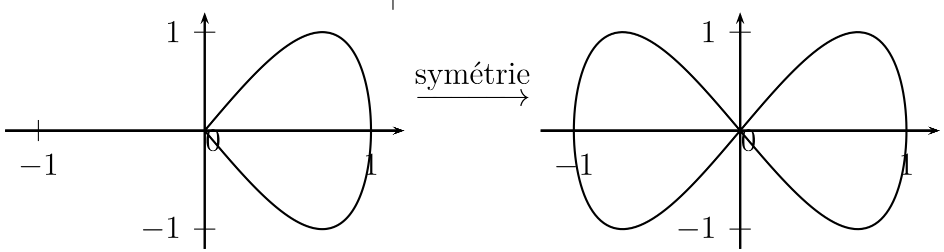
D'une part, la fonction x est périodique de période 2π. D'autre part : $y(t+T)=y(t) \iff \sin(2(t+T))=\sin(2t) \iff \sin(2t+2T)=\sin(2t)$, il suffit que $2T=2\pi$ donc $T=\pi$: y est périodique de période π.

Le plus petit multiple de π et de 2π est 2π donc $M(t)$ est périodique de période 2π : on pourra se contenter d'étudier la courbe sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

Enfin, x et y sont impaires (car …) donc la courbe est symétrique par rapport à O : on peut restreindre l'intervalle à $[0\,;\,\pi]$.

t	0		$\pi/2$		π
$x'(t)=\cos(t)$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

t	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		π
$2t$	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		2π
$y'(t)=2\cos(2t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0



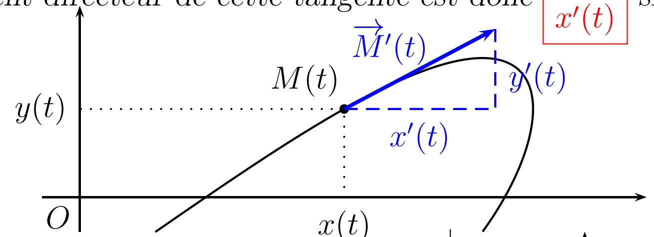
III. Vecteur tangent

Si x et y sont dérivables en t, on note $\boxed{\overrightarrow{M}'(t)\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}}$.

Propriété 2 (tangente à une courbe)

Si x et y sont dérivables en t et si $\overrightarrow{M}'(t)\neq\vec{0}$ alors la courbe admet une tangente au point $M(t)$ et cette $\boxed{\text{tangente est dirigée par } \overrightarrow{M}'(t)}$ ($\overrightarrow{M}'(t)$ est alors un vecteur tangent).

Le coefficient directeur de cette tangente est donc $\boxed{\dfrac{y'(t)}{x'(t)}}$ *si $x'(t)\neq 0$.*

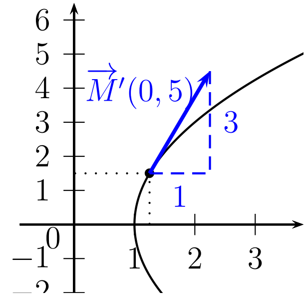


Exemple 1 :

Tracé de la tangente pour $t=0,5$.

Les coordonnées du point $M(0,5)$ sont $x(0,5)=1+0,5^2=1,25$ et $y(0,5)=3\times 0,5=1,5$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M}'(0,5)$ sont $x'(0,5)=2\times 0,5=1$ et $y'(0,5)=3$.



Remarque : cas particuliers (tangentes horizontales ou verticales)

si …	$x'(t)=0$	$x'(t)\neq 0$
$y'(t)=0$	point stationnaire[1]	tangente horizontale
$y'(t)\neq 0$	tangente verticale	tangente oblique

(1) Le programme de BTS exclut maintenant ce cas de figure.

Exemple 2 : La courbe précédente a des tangentes verticales aux points de paramètres $t=\pm\dfrac{\pi}{2}$ et horizontales pour $t=\pm\dfrac{\pi}{4}$ et $t=\pm\dfrac{3\pi}{4}$.