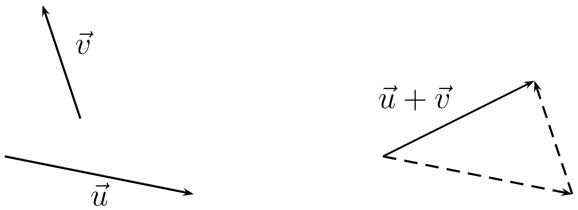
# Coordonnées cartésiennes dans le plan

## I. Bases. Coordonnées de vecteurs

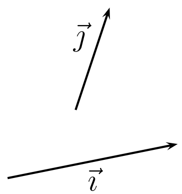
### Définitions

— Nous additionnons deux vecteurs en les mettant « bout-à-bout » :



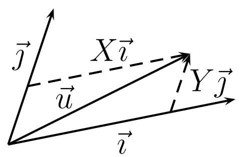

— Deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ non nuls sont colinéaires s'il existe un nombre $k$ tel que $\vec{\imath}=k.\vec{\jmath}$. Ils ont alors même direction (ils sont « parallèles »). On considère que le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

— Si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ne sont pas colinéaires alors ils forment une base du plan.




### Propriété 1

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe deux nombres uniques $X$, $Y$ tels que $\boxed{\vec{u}=X\vec{\imath}+Y\vec{\jmath}}$.




### Définition

$X$, $Y$ sont appelés coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

### Exemple 1

Si $\vec{u}=2\vec{\jmath}-\vec{\imath}$ alors $\vec{u}\binom{-1}{2}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

### Propriétés 2

Soient deux vecteurs $\vec{u}\binom{X}{Y}$ et $\vec{v}\binom{X'}{Y'}$ et $k$ un réel. Alors :

— $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\binom{X+X'}{Y+Y'}$

— $k\,\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{kX}{kY}$

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles donc si l'une des conditions suivantes est remplie :

– il existe $k$ tel que $\boxed{X'=k.X}$ et $\boxed{Y'=k.Y}$

– les « produits en croix » sont égaux : $\boxed{XY'=X'Y}$ (ce qui s'écrit aussi : $\boxed{XY'-X'Y=0}$).

### Exemple 2

Soient $\vec{u}\binom{2}{-5}$ et $\vec{v}\binom{-3}{2}$.

— Donnez les coordonnées de $-4\vec{u}+3\vec{v}$.

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Sinon trouvez $p$ tel que $\vec{u}$ et $\vec{w}\binom{-3}{p}$ le soient.

### Remarque

La colinéarité permet de prouver :

— que deux droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles (quand $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires) ;

— que trois points $A$, $B$, $C$ sont alignés (quand $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires).

# II. Repères. Coordonnées de points

**Définitions**

- Un repère du plan est un triplet $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ )$ où $O$ est un point et $(\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ )$ une base.
- Les coordonnées d'un point $M$ dans ce repère sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- Ces coordonnées sont notées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$. $x$ est l'abscisse ; $y$ est l'ordonnée ; $z$ est la cote.

**Propriété 3**

Soient $A$ et $B$ deux points de coordonnées respectives $(x_A\ ;\ y_A)$ et $(x_B\ ;\ y_B)$. Soit $I$ le milieu du segment $[AB]$. Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{I \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)}.$$

**Remarque**

Nous écrirons ici les coordonnées de vecteurs verticalement et celles des points horizontalement (mais nous pourrions écrire toutes les coordonnées horizontalement).

**Exemple 3**

Soient $F\,(-2\ ;\ 3)$ et $G\,(3\ ;\ 7)$.
Trouvez les coordonnées de $\overrightarrow{FG}$ et du milieu du segment $[FG]$.

# III. Bases et repères orthonormés

**Définitions**

- Une base $(\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ )$ est orthonormée si $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et si $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = 1$.
- Un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ )$ est orthonormé si la base $(\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ )$ est orthonormée.

**Propriété 4**

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée du plan. Alors la norme de $\vec{u}$ (sa longueur) est égale à :

$$\boxed{||\vec{u}|| = \sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

**Propriété 5**

Soient $A\,(x_A\ ;\ y_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B)$ dans un repère orthonormé. Alors

$$\boxed{AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}.$$

**Exemple 3**

Calculez $FG$ dans le cas précédent (on suppose que le repère est orthonormé).

Applications du calcul de distances :

- calculer une distance !
- montrer qu'un triangle est rectangle ou isocèle, etc. ;
- trouver une mesure d'un angle dans un triangle rectangle par exemple ;
- montrer qu'un point est sur un cercle donné ; écrire l'équation d'un cercle ;
- etc.