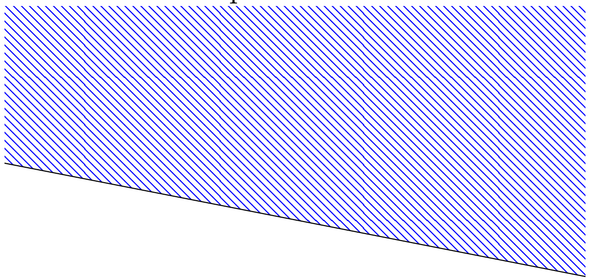
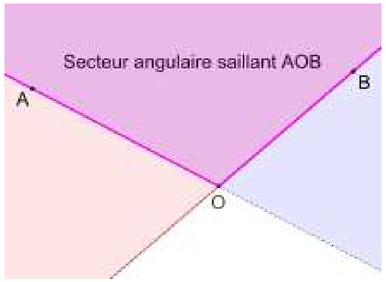
Angles géométriques

I. Définitions

➢ Un **demi-plan** est délimité par une droite :

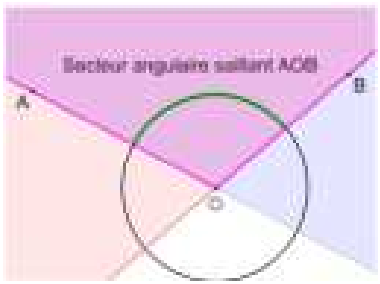


➢ Un **secteur angulaire** est obtenu par intersection de deux demi-plans délimités par des droites sécantes :



➢ L'**angle** d'un secteur angulaire est le nombre réel positif qui mesure la proportion du plan occupée par le secteur angulaire.
On peut utiliser un cercle pour mesurer cette proportion.

Exemple 1 :
Sur la figure ci-contre, l'arc vert est à peu près 1/3 du cercle complet donc l'angle est d'environ 1/3 du total des angles.
Si on appelle α une mesure de l'angle, on pourrait noter $\alpha \simeq \frac{1}{3}$.



➢ Pour plus de commodités (éviter de travailler avec des fractions par exemple), on utilise des unités telles que le degré (et ses sub-divisions : minutes et secondes) ou le grade :

$$\boxed{360° = 400 \text{ gr} = 1 \text{ tour complet}}$$

Exemple 1 : dans l'exemple précédent, l'angle mesure environ $\frac{1}{3}(360) = 120°$ ou $\frac{1}{3}(400) \simeq 133$ gr.

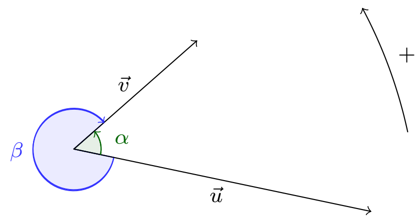
➢ L'unité naturelle en mathématiques est le radian.

$$\boxed{360° = 400 \text{ gr} = 2\pi \text{ radians} = 1 \text{ tour complet}}$$

C'est l'unité qui permet de faire correspondre le plus simplement les angles et les longueurs d'arc.

Exemple 1 : dans l'exemple précédent, l'angle mesure environ $\frac{1}{3}(2\pi) = \frac{2\pi}{3}$ radians.

➢ Angles de deux vecteurs.
On définit arbitrairement le sens positif (ou sens trigonométrique) comme étant le sens contraire des aiguilles d'une montre.



L'angle de la rotation qui amène $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ est noté $(\vec{u}; \vec{v})$.
C'est un angle de vecteurs, qui peut avoir un signe (sur la figure ci-dessus $(\vec{u}; \vec{v})$ a pour mesures $\alpha \simeq 53°$ et $\beta \simeq -307°$).

Remarque : un angle de vecteurs, exprimé en radians, est défini à 2π près (on dit « modulo 2π »).

Propriétés 1

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$:

$$(\vec{v};\vec{u}) = -(\vec{u};\vec{v})$$

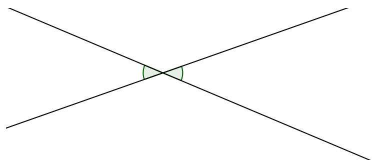
$$(\vec{u};\vec{v}) = k.\pi, \text{ avec } k \text{ entier} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

$$(\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{w}) + (\vec{w};\vec{v}) \qquad (\text{« relation de Chasles »})$$

II. Propriétés d'égalités d'angles

1) Angles opposés par le sommet

Deux droites sécantes définissent des secteurs angulaires opposés par le sommet.



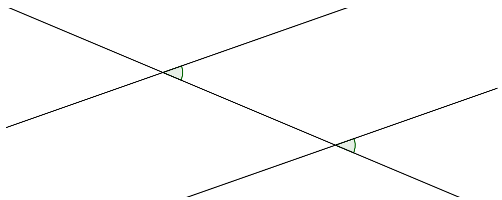
Propriété 2

Deux « angles » opposés par le sommet ont même mesure.

2) Angles correspondants

Dans la configuration ci-contre, deux droites parallèles sont coupées par une troisième droite.

Les secteurs angulaires représentés ont pour mesures des angles correspondants.



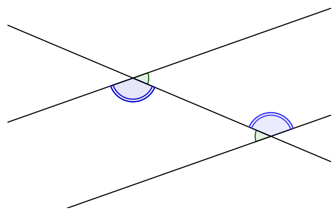
Propriété 3

Deux angles correspondants sont égaux.

3) Angles alternes-internes

Même configuration (deux droites parallèles coupées par une troisième).

On observe les angles « situés entre les droites parallèles », ceux représentés par la même marque sont alternes-internes.



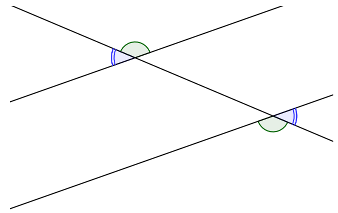
Propriété 4

Deux « angles » alternes-internes ont même mesure.

4) Angles alternes-externes

Même configuration que précédemment (mais on travaille « à l'extérieur des droites parallèles »).

On obtient des angles alternes-externes.



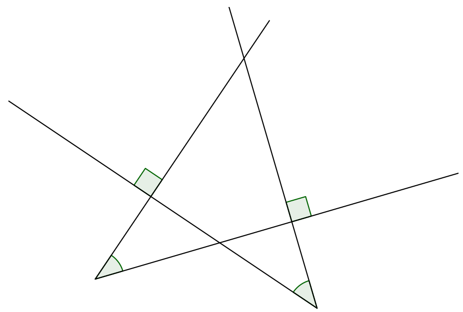
Propriété 5

Deux « angles » alternes-externes ont même mesure.

5) Angles à côtés perpendiculaires

Ici, deux secteurs angulaires ont des côtés perpendiculaires deux à deux.

On dit que ce sont des « angles » à côtés perpendiculaires.



Propriété 6

Deux « angles » à côtés perpendiculaires ont même mesure ou des mesures supplémentaires (la somme des deux fait 180°).