le cnam
École supérieure des géomètres et topographes esgt

Concours d'entrée TS et TS'

Session 2013

Épreuve de mathématiques

Durée : 3 heures

Calculatrice ESGT ; sans document

Ce devoir comporte trois problèmes entièrement indépendants que vous pouvez aborder dans n'importe quel ordre. Vous veillerez à indiquer clairement le numéro de chaque problème que vous traiterez. Vous pouvez utiliser toutes les relation indiquées dans l'énoncé même si vous n'êtes pas parvenu à les démontrer. Toutes les réponses proposées devront être soigneusement justifiées et rédigées dans un style clair et concis. La présentation sera prise en compte dans l'appréciation finale de la copie.

Problème 1 - *Étude d'une fonction gaussienne*

Toutes les fonctions considérées dans ce problème sont des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
L'inégalité des accroissements finis rappelée ci-après pourra être utilisée sans démonstration.

Soient m et M deux réels tels que $m \leq M$ et soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$. On suppose en outre que pour tout $x \in I$,

$$m \leq g'(x) \leq M.$$

Alors pour tous les nombres réels a et b appartenant à I tels que $a \leq b$, la double inégalité suivante est vérifiée :

$$m(b-a) \leq g(b) - g(a) \leq M(b-a).$$

Partie A - *Courbe représentative d'une fonction gaussienne*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Pourquoi peut-on réduire l'intervalle d'étude des variations de f à l'intervalle $[0; +\infty[$?
2. Quelle propriété de symétrie présente la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$?
3. Donner le sens de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
4. Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$ en précisant ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

On s'intéresse à présent à la fonction f'.

5. Montrer que pour tout x réel : $f'(x) + xf(x) = 0$.

6. En déduire que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée f'' vérifie la relation :

$$f''(x) = (x^2 - 1)f(x),$$

pour tout réel x.

7. Dresser le tableau des variations de f' sur l'intervalle $[0; +\infty[$ en précisant les limites de f aux bornes de cet intervalle.

8. En utilisant l'inégalité des accroissements finis et les résultats de la question 7, montrer que pour tous les nombres réels a et b tels que $0 \leq a \leq b \leq 1$:

$$f'(b)(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(a)(b-a),$$

et que pour tous les nombres réels a et b tels que $1 \leq a \leq b$,

$$f'(a)(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(b)(b-a).$$

Ces deux inégalités pourront être utilisées dans la suite du problème.

Soit Γ la courbe représentative de la fonction f dans le plan euclidien muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note T_a la tangente à la courbe Γ au point de coordonnées $(a, f(a))$, $a \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x, on appelle $t_a(x)$ l'ordonnée du point de la droite T_a d'abscisse x.

9. Donner l'expression de $t_a(x)$ en fonction de x, a, $f(a)$ et $f'(a)$?

10. On suppose que $a \in]0; 1[$. Montrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) \leq t_a(x)$.

    On distinguera les cas $x \leq a$ et $x \geq a$.

    Interpréter graphiquement ce résultat.

11. On suppose à présent que $a \in]1; +\infty[$. Montrer que pour tout réel $x \in [1; +\infty[$, $f(x) \geq t_a(x)$.

    Interpréter graphiquement ce résultat.

12. Montrer que $f(x) \leq t_1(x)$ pour $x \leq 1$ et que $f(x) \geq t_1(x)$ pour $x \geq 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

13. Tracer la courbe Γ ainsi que les tangentes T_0, $T_{\frac{1}{2}}$, T_1 et T_2 avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 5\,\text{cm}$.

Partie B - *Loi normale centrée réduite*

La fonction f désigne la fonction gaussienne définie dans la partie A. On admet que l'on définit une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}$ en posant pout tout réel x :

$$\mathbb{P}(]-\infty; x]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(]-\infty; +\infty[) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

La probabilité $\mathbb{P}$ correspond à celle de la loi normale centrée réduite. On pose également $A = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

1. Donner la valeur de $\mathbb{P}(]-\infty; 0])$.

2. Donner une expression de A en fonction de $\mathbb{P}(]-\infty; 1])$.

3. Une table de la loi normale centrée réduite a donné la valeur arrondie au dix-millième :

$$\mathbb{P}(]-\infty;1]) \approx 0,8413.$$

En déduire une approximation de A à 10^{-3} près.

Partie C - *Calcul numérique approché de A*

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement du nombre A défini dans la partie B afin d'obtenir, sans table, une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Soit n un entier naturel non nul. En utilisant les variations de la fonction f, démontrer que pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$ et pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $\left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$:

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

2. En déduire que pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

3. Déduire de ce qui précède la double inégalité ci-après valable pour tout entier n non nul :

$$u_n \leq A \leq \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{n\sqrt{e}}.$$

4. Montrer que pour tout entier n non nul :

$$A - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \leq u_n \leq A.$$

5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
6. Déterminer la valeur de n à partir de laquelle u_n correspond à une valeur approchée de A à 10^{-2} près. Le calcul de cette valeur approchée n'est pas demandé.

Problème 2 - *Une symétrie insoupçonnée du triangle*

Ce problème a bour but la démonstration d'une propriété remarquable d'un triangle du plan affine euclidien :

Dans un triangle non plat, trois points pris parmi les points d'intersection des trisectrices issues des sommets du triangle forme un triangle équilatéral. *(D'après Frank Morley, 1898)*

Soient O, A et B trois points du plan qui forment un triangle non plat et D une droite passant par O. On dit que D est une **trisectrice** de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ si et seulement s'il existe un point M de D distinct de O tel que :

$$\widehat{AOM} = \frac{1}{3}\widehat{AOB} \quad \text{ou} \quad \widehat{AOM} = \frac{2}{3}\widehat{AOB}.$$

Tout angle géométrique de mesure non nulle admet donc deux trisectrices.

Questions préliminaires : *Relation des sinus*

Soient ABC un triangle non plat, O le centre de son cercle circonscrit supposé de rayon R. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Démontrer, en distinguant les cas $\widehat{A} < \frac{\pi}{2}$, $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{A} > \frac{\pi}{2}$, la relation :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R.$$

2. En déduire la relation des sinus qui s'exprime par :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R.$$

Démonstration proprement dite du théorème de Morley

Soit ABC un triangle non plat quelconque et soient P, Q, R les points d'intersection des trisectrices issues respectivement des sommets B et C, C et A, A et B. Soient enfin α, β, γ, trois réels tels que : $\widehat{A} = 3\alpha$, $\widehat{B} = 3\beta$ et $\widehat{C} = 3\gamma$.

3. Réaliser une figure montrant les triangles ABC et PQR dans le cas où tous les angles du triangles ABC sont aigus.
4. En appliquant la relation des sinus aux triangles ABR et ABC, montrer que :

$$AR = 2R\sin\beta \frac{\sin(3\alpha + 3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

5. Montrer que pour tout nombre réel θ :

$$\sin 3\theta = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1).$$

   On commencera par exprimer $\sin(\theta + 2\theta)$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.
6. Montrer que :

$$4\sin(\alpha+\beta)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right) = \frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin\gamma}.$$

   On simplifiera séparément chacun des deux membres pour montrer qu'ils correspondent au même terme.

   On rappelle que pour tous réels p et q :

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

7. Montrer que :

$$AR = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right).$$

8. En déduire, sans aucun calcul, que :

$$AQ = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right),$$

puis que :

$$\frac{AR}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)} = \frac{AQ}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)} = 8R\sin\beta\sin\gamma.$$

9. Soit M le point de la demi-droite $[AQ)$ qui vérifie $\widehat{ARM} = \frac{\pi}{3}+\beta$. Calculer l'angle $\widehat{AMR}$.
10. Montrer que $AM = AQ$ en appliquant le théorème des sinus dans le triangle ARM. en déduire que les points M et Q sont confondus.
11. Justifier les égalités suivantes :

$$\widehat{ARQ} = \frac{\pi}{3}+\beta \quad \text{et} \quad \widehat{AQR} = \frac{\pi}{3}+\gamma.$$

12. Montrer que $RQ = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.
13. Terminer alors la démonstration du théorème de Morley en montrant que $RQ = RP = QP$.

Problème 3 - *Triangle d'aire maximale*

Soient A, B et C trois points non alignés du plan affine euclidien. Soient également α, β, γ les mesures respectives des angles géométriques $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ACD}$. On pose par ailleurs $x = BC$, $y = AC$, $c = AB$.

On suppose fixés la base AB du triangle ainsi que son périmètre p.

1. Démontrer l'égalité suivante connue sous le nom de théorème d'Al-Kashi :

$$y^2 = c^2 + x^2 - 2cx\cos\beta.$$

1. On distinguera les cas où β est un angle aigu ou obtus.
2. En déduire la relation :

$$\sin\beta = \frac{1}{2cx}\sqrt{\left((c+x)^2 - y^2\right)\left(y^2 - (c-x)^2\right)}.$$

3. Montrer que l'aire S du triangle ABC est donnée par :

$$S = \frac{cx\sin\beta}{2}.$$

4. En déduire la relation suivante connue sous le nom de formule de Héron :

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-c\right)\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right)}.$$

5. Montrer que S^2 s'exprime sous la forme : $S^2 = k(m-x)(c+x-m)$ où k et m sont des constantes que l'on exprimera en fonction de c et p.

   Montrer que la constante k est positive.
6. Montrer que S^2 atteint un maximum pour une valeur de x que l'on exprimera en fonction de c et p. En déduire que $x = y$.
7. Énoncer un théorème à propos du triangle qui, parmi les triangles dont le périmètre et un côté ont été fixés, a la plus grande aire.

Fin de l'épreuve