Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS

ÉCOLE SUPÉRIEURE DES GÉOMÈTRES ET TOPOGRAPHES

CONCOURS D'ENTRÉE

TS et TS'

Session 2012

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures – Coefficient : 2

Documents Interdits

Calculatrice fournie par l'ESGT uniquement.

Le sujet comporte 5 pages
avec 5 exercices.

le cnam
École supérieure des géomètres et topographes esgt

Concours d'entrée TS et TS'

Session 2012

Épreuve de mathématiques

Durée : 3 heures

Calculatrice ESGT ; sans document

Ce devoir comporte cinq exercices entièrement indépendants que vous pouvez aborder dans n'importe quel ordre. Vous veillerez à indiquer clairement le numéro de chaque exercice que vous traiterez. Toutes les réponses proposées devront être soigneusement justifiées et rédigées dans un style clair et concis. La présentation sera prise en compte dans l'appréciation finale de la copie.

Exercice 1 - *Autour de la fonction exponentielle*

Soit f la fonction exponentielle de base e défini de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$f \, : \, x \longmapsto e^x.$$

On appelle Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Soit M_0 un point quelconque de la courbe Γ d'abscisse x_0. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente $T(M_0)$ à la courbe Γ au point M_0. Vous montrerez en particulier que cette équation s'écrit sous la forme :
$$y - e^{x_0} = a\,(x - x_0),$$
où a est un réel que vous exprimerez en fonction de x_0.
2. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente $T(M_0)$ avec l'axe des abscisses ; en déduire une méthode de construction de cette tangente.
3. Dessiner l'allure de la partie de la courbe Γ correspondant à l'intervalle $[-1, +1]$; on prendra 5 cm pour représenter les vecteurs unitaires. Dessiner également les tangentes à la courbe Γ aux points d'abscisses -1, 0 et 1.

On suppose dans la suite que x appartient à l'intervalle $I = [-0,5\,;\,+0,5]$. On considère les fonctions α et β définies sur I respectivement par :

$$\alpha(x) \;=\; e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}e^{-0,5},$$

$$\beta(x) \;=\; e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}e^{0,5}.$$

4. Calculer les fonctions dérivées premières $\alpha'(x)$, $\beta'(x)$ et secondes $\alpha''(x)$, $\beta''(x)$.

5. Montrer que pour tout x appartenant à I, $\alpha''(x) \geq 0$ et $\beta''(x) \leq 0$. En déduire les tableaux de variation des fonctions α' et β' sur l'intervalle I en précisant seulement les valeurs de $\alpha'(0)$ et $\beta'(0)$.
6. À partir des tableaux de variation dressés à la question 5, montrer que $\alpha'(x) \leq 0$ et $\beta'(x) \geq 0$ pour $x \in [-0,5\,;\,0]$. Que deviennent les signes respectifs de α' et β' sur l'intervalle $[0\,;\,0,5]$?
7. Dressez à présent les tableaux de variations des fonctions α et β sur l'intervalle I.
8. À partir des résultats précédents, montrer que pour tout x appartenant à I, $\alpha(x) \geq 0$ et $\beta(x) \leq 0$; en déduire l'inégalité suivante valable pour tout x appartenant à I :
$$1 + x + \frac{x^2}{2}e^{-0,5} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{0,5}.$$
9. À partir de l'inégalité établie à la question 8, justifier l'inégalité
$$-\frac{x^2}{2}e^{0,5} \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^{0,5}$$
valable pour tout x appartenant à I. En déduire que pour tout réel x **non nul** de I :
$$\left|\frac{e^x - 1}{x} - 1\right| \leq \frac{|x|}{2}e^{0,5}.$$

L'inégalité précédente permet d'affirmer que lorsque x appartient à l'intervalle I :
$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0)\right| \leq \frac{|x|}{2}e^{0,5}.$$

10. Déterminer un intervalle J inclus dans I tel que :
$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0)\right| \leq 10^{-2}.$$

Exercice 2 - *Probabilités conditionnelles : test de dépistage*

Vous êtes le directeur du cabinet du ministre de la santé. Une maladie a fait apparition dans la population dans la proportion d'une personne sur 10000. Le représentant d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter les performances de son nouveau test de dépistage :

- si une personne est malade, le test est positif à 99% ;
- si une personne est saine, le test est positif à 0, 1%.

On appelle P (resp. N) l'événement « la personne a un test positif » (resp. « négatif ») et M (resp. S) « la personne est malade » (resp. « saine »).

1. Exprimer les probabilités $\mathbb{P}(M \mid P)$ et $\mathbb{P}(P \mid M)$ en fonction de $\mathbb{P}(P \cap M)$, $\mathbb{P}(P)$ et $\mathbb{P}(M)$.

   En déduire l'égalité :
$$\mathbb{P}(M \mid P) = \frac{\mathbb{P}(P \mid M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)}.$$

On admet la realtion $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P \mid S)\mathbb{P}(S)$.

2. Montrer que la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit effectivement malade est égale à 9%.
3. En déduire le nombre de « faux positifs » sur une polulation de 100 personnes.
4. Autoriseriez-vous la commercialisation de ce test compte tenu du résultat de la question 3 ?

Exercice 3 - *Ellipse et affinité orthogonale*

Le plan euclidien $\mathcal{E}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère la courbe C de représentation paramétrique :

$$\left\{ \begin{array}{lll} x(t) & = & R\cos(t) \\ y(t) & = & R\sin(t) \end{array} \right. , \ t \in]-\pi\,;\,\pi],$$

où R est un réel strictement positif.

1. Montrer que la courbe C est le cercle de centre O et de rayon R.

Soit d l'axe des abscisses et k un réel non nul. On appelle **affinité orthogonale** d'axe d et de rapport k la transformation φ qui à tout point M de $\mathcal{E}$ de coordonnées (x, y) associe le point $\varphi(M)$ de coordonnées (x, ky).

2. Déterminer la transformation inverse φ^{-1} de la transformation φ.

On considère à présent la courbe E admettant la représentation paramétrique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lll} x(t) & = & \alpha\cos(t) \\ y(t) & = & \beta\sin(t) \end{array} \right. , \ t \in]-\pi\,;\,\pi],$$

où α et β sont deux réels strictement positifs.

Toute courbe admettant une telle représentation paramétrique dans un certain repère est appelée **ellipse**.

3. Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de la courbe E. Ce point est le **centre** de l'ellipse.

4. Construire l'ellipse E dans le cas particulier où $\alpha = 2$ et $\beta = 1$; vous prendrez 2 cm pour représenter les vecteurs unitaires.

5. On suppose k strictement positif et α et β strictement positifs et quelconques. Démontrer que l'image de l'ellipse E par φ, $\varphi(E)$, est elle-même une ellipse.

6. Que peut-on dire de $\varphi(E)$ lorsque k est strictement négatif ?

7. L'ellipse $\varphi(E)$ peut-elle être un cercle ? Si oui, à quelle condition ?

8. Donner le rapport k de l'affinité orthogonale φ d'axe d qui transforme l'ellipse étudiée à la question 4 en un cercle dont on précisera le rayon.

Exercice 4 - *Condition de contact entre un cercle et une droite*

Soient C le cercle de centre I et de rayon $R > 0$, $[GG']$ un diamètre du cercle C et H un point de C distinct de G et G'. On appelle Δ et Δ' les tangentes au cercle C aux point G et G' respectivement. La tangente en H au cercle C coupe les droites Δ et Δ' aux points P et P' respectivement.

1. Sur figure soignée, représenter le cercle C, le segment $[GG']$, les droites Δ, Δ', les points I et H et la droite (PP').

2. Montrer que les droites (PI) et $(P'I)$ sont les bissectrices respectives des angles $\widehat{HPG}$ et $\widehat{HP'G'}$.

3. En déduire que le triangle PIP' est rectangle en I.

Indication : considérer la somme des mesures des angles $\widehat{GIP}$, $\widehat{PIH}$, $\widehat{HIP'}$, $\widehat{P'IG'}$ qui vaut $180°$.

4. Montrer que : $\overrightarrow{HP}.\overrightarrow{HP'} = -R^2$.

Indication : développer $\overrightarrow{HP}.\overrightarrow{HP'} = (\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IP}).(\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IP'})$ en tenant compte des propriétés de la figure et utiliser la relation $\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IP'} = 2\overrightarrow{IH}$.

5. En déduire que : $\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P'} = R^2$.

Réciproquement, soient deux points P et P' appartenant respectivement aux tangentes Δ et Δ' tels que $\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P'} = R^2$.

6. On appelle $(I, \vec{u}, \vec{v})$ le repère orthonormal direct tel que $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{IG}}{R}$. Soient y_P et $y_{P'}$ les ordonnées respectives des points P et P' dans ce repère. Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GP}$ et $\overrightarrow{G'P'}$ et montrez ensuite que :

$$\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{G'P'} = y_P y_{P'} = R^2.$$

7. Montrer que l'équation de la droite (PP') dans le repère $(I, \vec{u}, \vec{v})$ peut s'écrire sous la forme :

$$y = y_P + \frac{y_P - y_{P'}}{2R}(x - R).$$

On rappelle que dans un repère orthonormal, la distance d entre la droite d'équation $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont trois réels (a et b étant non tous nuls) et le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) est donnée par :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

8. Calculer la distance d entre le point I et la droite (PP'). En déduire que la droite (PP') est tangente au cercle C.

9. Énoncer une condition de contact d'une droite avec un cercle.

Exercice 5 - *Équation complexe d'une droite*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soient Γ le cercle de centre O et de rayon 1 et A, B, C et D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d. Il est vivement conseillé de réaliser plusieurs figures séparées.

1. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes parallèles du cercle Γ. Montrer que les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}})$ sont égaux ; en déduire l'égalité $ab = cd$ que l'on pourra admettre pour la suite.

Indication : considérer l'égalité $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) + (\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CD}}) + (\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DO}}) + (\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA}}) = 0 \;\; [2\pi]$.

Soit I le milieu de la corde $[AB]$ du cercle Γ. Soient $Z(z)$ un point quelconque, $S(s)$ l'image du point Z dans la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$ et $T(t)$ le symétrique du point S par rapport au point I.

2. À l'aide du résultat de la question 1, montrer que lorsque le point Z est différent du point O :

$$\frac{s}{|s|}\frac{z}{|z|} = ab.$$

Cette égalité est-elle toujours valable lorsque Z coïncide avec O ? Justifiez l'égalité $|z| = |s|$.

3. Exprimer t en fonction de a, b, z et $\bar{z}$, complexe conjugué de z.

On rappelle que si $z \neq 0$ alors $\bar{z} = \dfrac{|z|^2}{z}$.

4. Montrer que si le point Z appartient à la droite (AB) alors Z et T sont confondus.

5. Réciproquement, montrer que si Z et T sont confondus, alors les droites (AB) et (ST) sont nécessairement confondues ; en déduire que le point Z appartient à (AB).

6. Déduire de ce qui précède que la relation

$$z + ab\bar{z} = a + b$$

caractérise les points $Z(z)$ de la droite (AB).

7. Soit $[PQ]$ un diamètre du cercle Γ et soit p l'affixe du point P. Montrer que les points de la droite (PQ) sont caractérisés par la relation

$$z - p^2\bar{z} = 0.$$

8. Soit Δ une droite quelconque du plan passant par le point $Z_0(z_0)$ et parallèle à la droite (PQ). On appelle $M'(z')$ l'image d'un point $M(z)$ quelconque de Δ par la translation de vecteur $\overrightarrow{Z_0O}$. Montrer que le point M' appartient à la droite (PQ) et calculez son affixe z' en fonction de z et z_0.

9. En déduire que les points $M(z)$ de la droite Δ sont caractérisés par la relation :

$$z - p^2\bar{z} = z_0 - p^2\bar{z}_0.$$

La relation ci-dessus est une équation dans le plan complexe de la droite Δ. Le nombre $-p^2$ est le coefficient directeur complexe de toute droite parallèle à la droite (PQ).

Fin l'épreuve