

CONCOURS ESGT TS-TS' 2009
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures – Coefficient : 2

Documents interdits.

Calculatrice fournie par l'ESGT uniquement.

Les sept exercices sont indépendants.

Exercice I

Fournir les caractéristiques ainsi que l'équation réduite de la conique suivante :

$$x^2 = \frac{25}{2} \left[y - \frac{6}{10} \right]^2 + 1$$

Exercice II

Soit le nombre complexe Z défini par :

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \text{ avec } i \text{ tel que } i^2 = -1.$$

- 2.1/ Déterminer le module et l'argument du nombre complexe Z .
- 2.2/ Déterminer l'ensemble E formé des entiers positifs non nuls n tels que Z^n soit réel.
- 2.3/ Calculer Z^k pour la plus petite des valeurs k de l'ensemble E .

Exercice III

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les trois points A, B et C placés sur les trois axes de coordonnées : $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3)$.

- 3.1/ Déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire \vec{n} perpendiculaire au plan ABC .
- 3.2/ Calculer l'aire du triangle ABC en utilisant le produit vectoriel.
- 3.3/ Quel est le volume du parallélépipède construit sur AO, AB, AC ?

Exercice IV

On fournit l'inégalité de Schwartz suivante :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a; b], b \geq a$.

$$\text{Alors : } \left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right) \left(\int_a^b (g(x))^2 dx \right)$$

Vérifier l'inégalité de Schwartz sur l'intégrale suivante : $\int_0^1 \exp(-x)dx$.

(Note : comprendre « quand $f(x) = g(x) = \exp(-x)$ »)

Exercice V

Cet exercice porte sur l'étude de l'évolution de la masse d'un organisme au cours du temps.

5.1/ Étudier les variations de la fonction numérique de la variable réelle positive t :

$$h : t \rightarrow \frac{3}{1 + 2\exp(-2t)}.$$

5.2/ Tracer la courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.

5.3/ Déterminer le temps nécessaire pour que la masse initiale double.

Exercice VI

Combien faut-il de lancers, au minimum, d'une pièce équilibrée afin que la probabilité d'avoir 0 « pile » soit majorée par 2 % ?

Exercice VII

Soit la fonction de la variable réelle x définie par :

$$s : x \rightarrow \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}.$$

7.1/ Fournir $s'(0)$ en utilisant le développement limité de s à l'ordre 2.

7.2/ Retrouver directement cette valeur.