CONCOURS ESGT TS-TS' 2008

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures – Coefficient : 2

Documents interdits.

Calculatrice fournie par l'ESGT uniquement.

Les sept exercices sont indépendants.

Exercice I

Soient les suites (U_n) et (V_n) définies sur les entiers naturels par :

$$U_0 = 1$$
$$U_{n+1} = \frac{U_n}{3} + n - 1$$
$$V_n = 4\,U_n - 6n + 15$$

1°) Démontrer que la suite (V_n) est géométrique et en déduire l'expression de V_n en fonction de n.

2°) Prouver que la suite (U_n) peut s'écrire sous la forme d'une somme d'une suite géométrique (T_n) et d'un suite arithmétique (W_n).

Exercice II

Soit la suite des nombres complexes $\{Z\}$ définie par :

$Z = \dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^n}$ avec n entier naturel et i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Quels sont les éléments réels de la suite ?

Exercice III

Soit l'espace vectoriel $\boldsymbol{V}$ rapporté à la base canonique $\vec{\imath} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\{\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\}$ une base quelconque de $\boldsymbol{V}$.

Montrer que l'on peut construire une base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ orthonormée dont le premier vecteur soit colinéaire à $\vec{U}$ et le second dépende de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$.

Application : $\vec{U} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{V} = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{W} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$.

Exercice IV

Donner les solutions réelles de l'équation du second degré suivante :

$$X^2 - 2\cos(a)X + 1 - \sin(a) = 0$$

a paramètre réel avec $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice V

1°) Donner les variations de la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f : x \rightarrow \frac{x}{\ln x}$$

Construire sa courbe dans un repère orthonormé.

2°) A l'aide de la représentation précédente résoudre l'équation suivante :
$a^b = b^a$ avec a et b entiers positifs distincts.

Exercice VI

Une urne contient r boules rouges, v boules vertes et b boules blanches.

1°) Dans une première expérience, on tire trois boules à la fois. Quelle est la probabilité pour que les trois boules soient de la même couleur ?

2°) Dans une deuxième expérience, on tire les trois boules l'une après l'autre (tirage effectué avec remise).
Quelle est la probabilité pour que les trois boules soient de couleurs différentes ?

Exercice VII

Fournir une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$F(x) = 1/x\ln(x)$

$G(x) = 1/x(\ln(x))^2$