

CONCOURS ESGT 2004
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice I

1°) Rappeler les caractéristiques de la loi binomiale.

2°) On lance J fois de suite une pièce normale (J entier supérieur à 1).

Déterminer l'ensemble des valeurs de J telles que la probabilité d'obtenir moins de 2 fois « pile » soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice II

On considère l'équation $f(z) = 0$ avec

$$f(z) = iz^3 + (-1 + 2i)z^2 - (4 + i)z + 3(-1 + 2i)$$

Résoudre l'équation dans l'ensemble des nombres complexes sachant qu'elle admet une solution réelle.

Exercice III

Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$U_n = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad V_n = 2^{n+1} \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}, n \text{ entier naturel}\right)$$

sont respectivement croissante et décroissante et qu'elles admettent la même limite.

Exercice IV

Déterminer et construire l'ensemble A des points du plan dont les coordonnées dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ vérifient :

$$x|x| + 4y^2 - 4x - 8y = 0$$

Exercice V

Étudier la fonction :

$$g : x \mapsto x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ en suivant la méthodologie suivante :

1. domaine de définition et continuité
2. étude des limites et recherche des asymptotes
3. dérivabilité
4. tableau des variations
5. tracé graphique.

(soit c la valeur d'annulation de la dérivée sur le domaine, on prendra $g(c) = -3, 3$).

Exercice VI

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs donnés dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1°) Quelle relation doit-il exister entre \vec{u} et \vec{v} pour que l'on puisse trouver un vecteur \vec{x} tel que $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$?
- 2°) On suppose cette condition satisfaite. Démontrer que $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -u^2 \vec{v}$
(on prendra \vec{u} parallèle à l'axe Ox).

Exercice VII

Un insecte relie les deux côtés opposés d'une pièce cubique de côté a .

Quel est, en fonction de a , la distance minimale parcourue par l'insecte en marchant sur les murs ou le plafond ? (faire un dessin).