CONCOURS ESGT 2003
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures – Coefficient : 2

Exercice I

Soient deux arcs α et β exprimés en radians et compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ tels que :

$\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ et $\operatorname{cotan}\beta = \sqrt{x}$.

1.1) Trouver la relation vérifiée par la somme $\alpha + \beta$.

1.2) Vérifier cette relation pour $x = 1$.

Exercice II

2.1) Fournir l'équation réduite puis discuter suivant les valeurs de m, paramètre réel non nul, de la nature des courbes représentées en axes rectangulaires par l'équation :

$$y^2 = mx^2 + 2(1-m)x + m - 1.$$

2.2) Dans le cas particulier $m = -1$, tracer la courbe correspondante.

Exercice III

Soient $z = x + \mathrm{i}y$ et $Z = X + \mathrm{i}Y$, deux nombres complexes liés par la relation :

$$Z = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{(E)}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels tels que : $ad - bc \neq 0$.

La transformation ponctuelle du plan orthonormé Oxy fait correspondre au point m d'affixe z, le point M d'affixe Z.

3.1) Cette transformation conserve-t-elle l'axe $x'x$?

3.2) On considère, sur l'axe $y'y$, un point quelconque m d'affixe $z = \mathrm{i}y$; calculer l'affixe Z du point M correspondant.

3.3) Comment faut-il choisir a, b, c et d pour que (E) conserve l'axe $y'y$?
(on trouvera qu'il existe deux transformations répondant à la question)

3.4) On considère celle, (T), des deux transformations précédentes (autre que l'identité) admettant le point $A\,(1\,;\,0)$ pour point double. Montrer qu'elle est involutive et qu'elle admet aussi le point double $B\,(-1\,;\,0)$.

3.5) Dans la transformation T, quelle est l'homologue d'une droite issue de O, d'un cercle passant par A et B ?

Exercice IV

Dans la suite le terme « positif » s'entend au sens large. Pour tout nombre réel positif k, on définit la fonction réelle f_k sur l'ensemble des réels positifs de la variable t par :

$$f_k(t) = t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, .$$

On désigne par C_k le graphe de f_k.

4.1) Étudier, suivant les valeurs de k, la fonction f_k au voisinage de 0.

On distinguera les quatre ensembles de valeurs de k suivantes :

$k = 0$, $0 < k < 1$, $k = 1$ et $k > 1$.

4.2) Étudier en fonction de k les variations de f_k.

4.3) Tracer sur le même graphique les quatre types de courbes C_k correspondant aux ensembles de valeurs de k précédents.

4.4) Pour tout réel positif k, on pose l'intégrale suivante : $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

Trouver une relation entre I_k et I_{k+1}.

Lorsque k est entier, exprimer I_k en fonction de k.

Exercice V

Une urne contient trois boules blanches et x boules noires ($x \geqslant 2$).

On tire simultanément deux boules de l'urne ; les boules sont indiscernables au toucher et tous les tirages de deux boules sont équiprobables. On désigne par X la variable aléatoire réelle : « nombre de boules blanches tirées ».

5.1) Déterminer, en fonction de x, la loi de probabilité de X (on donnera les probabilités sous la forme de fractions rationnelles).

5.2) Calculer l'espérance mathématique de X notée $E(X)$.

5.3) Calculer x pour que $P(X = 0) = P(X = 2)$. Que vaut alors $E(X)$?