CONCOURS ESGT 2002 – TS et TS'

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures – Coefficient : 2

11 est rappelé que l'utilisation de la calculatrice est interdite.

Les six exercices sont indépendants.

Le sixième exercice est un Q.C.M que vous prendrez soin de remettre avec votre copie.

Exercice I

Soients les nombres complexes :

$$Z_1 = \frac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \text{ et } Z_2 = 1 - \mathrm{i}.$$

1°) Mettre sous forme trigonométrique Z_1 et Z_2.

2°) Mettre sous forme algébrique et trigonométrique le nombre Z tel que $Z = Z_1/Z_2$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x suivante :
$\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\sin x = 2.$

4°) Placer les points images des solutions de l'équation sur le cercle trigonométrique.

Exercice II

1°) a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n + 2^{-n})}{2n} = 0.$

b) En déduire la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1 + n2^{n})}{2n}.$

2°) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}\,\mathrm{d}x.$$

a) Calculer u_0.

b) Calculer u_n, pour tout entier n supérieur à 0.

c) Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

Exercice III

1°) Étudier sur $\mathbb{R}$ privé de 0 la fonction g définie par

$$g(x) = x\,\mathrm{e}^{1/x}\,.$$

2°) Représenter le graphe C de la fonction g dans un repère orthonormé.

Exercice IV

Soit A, B, C trois points du plan non alignés tels que le triangle ABC ne soit pas équilatéral.

On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

1°) On considère le vecteur $\vec{u} = a^2\,\overrightarrow{BC} + b^2\,\overrightarrow{CA} + c^2\,\overrightarrow{AB}$.

Montrer que $\vec{u} = (a^2 - b^2)\,\overrightarrow{AC} + (c^2 - a^2)\,\overrightarrow{AB}$.

En déduire que $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul.

2°) Pour tout point M du plan on pose :

$$f(M) = a^2\,\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA'} + b^2\,\overrightarrow{CA}\overrightarrow{MB'} + c^2\,\overrightarrow{AB}\overrightarrow{MC'}.$$

a) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, calculer $f(O)$.

b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

Montrer que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GA'} = \dfrac{1}{6}(b^2 - c^2)$.

En déduire la valeur de $f(G)$.

c) Déterminer l'ensemble D des points N du plan tels que $f(N) = O$.

(on illustrera à l'aide d'un dessin).

Exercice V

Un service a une fréquentation moyenne horaire de 3 personnes.

On applique une loi de Poisson au nombre aléatoire X de personnes entrant dans ce service dans un laps de temps T, exprimé en heures.

1°) Formuler et comparer les probabilités P_1 et P_2 qu'il n'y ait aucun client se présentant pendant la première demi-heure et pendant les cinq premières minutes.

2°) Formuler la fréquentation moyenne horaire afin que la probabilité d'arrivée du 1^{er} client après 20 minutes soit supérieure à 50 %.

Exercice VI

Q.C.M.

(cocher la ou les bonne(s) réponse (s) aux questions posées)

1°) En coordonnées sphériques, le lieu des points tels que r = cste est :

- (1) un cercle ☐
- (2) un cylindre ☐
- (3) une sphère ☐
- (4) un plan ☐

2°) En coordonnées polaires, on repère deux points $M_1\,(r_1, \theta_1)$ et $M_2\,(r_2, \theta_2)$.
Quelle condition doivent remplir θ_1 et θ_2 pour que $\overrightarrow{OM}_1 \wedge \overrightarrow{OM}_2 = \vec{0}$?

- (1) $\theta_1 = \theta_2 \pm \dfrac{\pi}{2}$ ☐
- (2) $\theta_1 = \theta_2 \pm \pi$ ☐
- (3) $\theta_1 = -\theta_2 \pm \pi$ ☐

3°) Un angle de 1° vaut :

- (1) $\pi/180$ radians ☐
- (2) 60' ☐
- (3) 10/18 grades ☐

4°) L'inégalité : $\left| \displaystyle\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$

- (1) est toujours vérifiée ☐
- (2) est vraie suivant l'allure de $f(x)$ ☐
- (3) est vérifiée si $a < b$ ☐

5°) L'équation $x - \mathrm{e}^{-x} = 0$ sur $\mathbb{R}$:

- (1) n'a pas de solution ☐
- (2) a une solution unique ☐
- (3) a plusieurs solutions ☐