CONCOURS ESGT 2001

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures – Coefficient : 2

L'utilisation de la calculatrice est interdite.

Exercice I

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation trigonométrique suivantes :

1°) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1.$

2°) $\dfrac{2\cos 2x - 1}{1 + 2\cos 2x} < 0.$

Exercice II

Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z = \dfrac{3}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$ puis calculer z^4 sous forme algébrique.

Exercice III

Une urne contient 5 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules rouges.

On tire au hasard 3 boules simultanément.

Calculer les probabilités suivantes :

1°) Avoir au moins 2 boules blanches.

2°) Avoir au moins 2 boules de même couleur.

3°) Avoir une boule de chaque couleur.

Exercice IV

1°) Étudier la fonction f définie par $f(x) = \ln(x - \ln x)$ où $\ln x$ désigne la fonction logarithme népérien de x.

2°) Illustrer graphiquement l'existence du point d'inflexion.

3°) Positionner le graphe C_1 de la fonction f par rapport au graphe C_2 de la fonction g telle que $g(x) = \ln x$ dans un même repère orthonormé.

Exercice V

On considère l'intégrale suivante :

$$I_p = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^p} \qquad p \text{ réel strictement positif.}$$

Déterminer une relation de récurrence entre I_p et I_{p+1}.

Exercice VI

On considère la sphère (S), d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0$ et le plan (P) d'équation $x + y + z - 1 = 0$.

Démontrer que (P) coupe (S) suivant un cercle (C) dont on déterminera les coordonnées du centre, H, et le rayon r.

Exercice VII

1°) Calculer par récurrence les dérivées successives de $\sqrt{1+x}$.

2°) Montrer par récurrence que la dérivée $n^{\text{ième}}$ du produit de 2 fonctions n fois dérivables f et g est :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \text{(formule de Leibniz).}$$

La notation $f^{(p)}$ désigne la dérivée $p^{\text{ième}}$ de f, lorsque $p = 0$, $f^{(0)}$ désigne, par convention, la fonction f.

3°) Application : formuler la dérivée $n^{\text{ième}}$ $(n > 4)$ de $h(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 1\right)\sqrt{1+x}$.