BTS Géomètre Topographe - Session 2008

Exercice I (11 points)

On rappelle la formule fondamentale de trigonométrie sphérique :

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos \hat{A}$$

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

Sur la sphère (Σ) de centre O et de rayon 1, on considère les points N, S, A et B de coordonnées :

$N\begin{cases}\text{longitude : } 0° \\ \text{latitude : } 90° \text{ Nord}\end{cases}$ $S\begin{cases}\text{longitude : } 0° \\ \text{latitude : } 90° \text{ Sud}\end{cases}$ $A\begin{cases}\text{longitude : } 90° \text{ Est} \\ \text{latitude : } 0°\end{cases}$ $B\begin{cases}\text{longitude : } 45° \text{ Est} \\ \text{latitude : } 30° \text{ Nord}\end{cases}$

1°) Placer ces points sur la figure donnée **en annexe**.

2°) Déterminer, par lecture directe ou par calcul, les longueurs des côtés du triangle sphérique ABS.

3°) Déterminer les coordonnées cartésiennes de N, S et A.

Montrer que $B\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\,;\,\dfrac{\sqrt{6}}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

4°) *On rappelle que si le point M' est l'image du point M dans une inversion de centre Ω et de rapport k, on a :* $\overrightarrow{\Omega M'} = \dfrac{k}{\Omega M^2}\overrightarrow{\Omega M}$.

On considère l'inversion I de pôle N et de puissance 4.

Quelle est l'image (P) de la sphère (Σ) privée de N par l'inversion I ? Justifier.

Préciser une équation de (P).

5°) Soit E le point de coordonnées $E\left(\sqrt{6}\,;\,\sqrt{6}\,;\,-1\right)$.

a) Placer E sur la figure.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NE}$.

c) Montrer que E est l'image de B par l'inversion I.

6°) A, B et S définissent un cercle (C) dans l'espace. Soit $A' = I(A)$.

a) Placer A'. Par lecture sur la figure donner les coordonnées du point A'.

b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{SA} \wedge \overrightarrow{SB}$.

En déduire une équation du plan (ABS).

c) Montrer que tous les points de (C) sont sur (Σ).

Exercice II (9 points)

Le but de cet exercice est l'étude de raccordements routiers de deux sections rectilignes par une section circulaire ou du quatrième degré.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$, **la figure en fin d'énoncé** schématise les différents raccordements de la section rectiligne $[AB]$ avec la section rectiligne $[EF]$.

- (Oy) est axe de symétrie de la figure.
- C_1 représente le raccordement circulaire.
- C_2 représente le raccordement du quatrième degré.
- Les points A et B ont pour coordonnées $A\left(-\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$ et $B\,(-1\,;\,1)$.

Partie A : Sections rectilignes

Les segments $[AB]$ et $[FE]$ sont donc symétriques par rapport à (Oy).

1°) Déterminer les coordonnées des points E et F.

2°) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$. Montrer qu'ils sont orthogonaux.

3°) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB). En déduire celle de (EF).

Partie B : Raccordement circulaire C_1

C_1 passe par les points B et E et la droite (AB) est tangente à l'arc de cercle C_1.

1°) Justifier que le centre Ω_1 de l'arc de cercle C_1 est un point de l'axe (Oy).

2°) Calculer les coordonnées de Ω_1.

3°) Vérifier qu'une équation cartésienne du cercle support de C_1 est : $x^2 + (y-2)^2 = 2$.

4°) *La courbure en un point quelconque du segment $[AB]$ est nulle.*

Déterminer la courbure en un point quelconque de l'arc de cercle C_1.

On rappelle que la courbure est l'inverse du rayon de courbure.

Partie C : Raccordement du quatrième degré.

Le raccordement circulaire précédent créerait une rupture brutale de courbure en B comme en E. Le but est donc de créer un raccordement ne présentant pas cet inconvénient.

La courbe C_2 est définie par l'équation $y = f(x)$.

1°) Justifier que $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$.

2°) *On rappelle que la courbure en un point d'abscisse x_0 d'une courbe définie par l'équation $y = f(x)$ est :* $\dfrac{1}{R} = \dfrac{f''(x_0)}{\left[1 + (f'(x_0))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$.

Pour quelle raison veut-on que $f''(1) = 0$?

3°) On admet, à partir de maintenant, que $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

Montrer que $f(-x) = f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

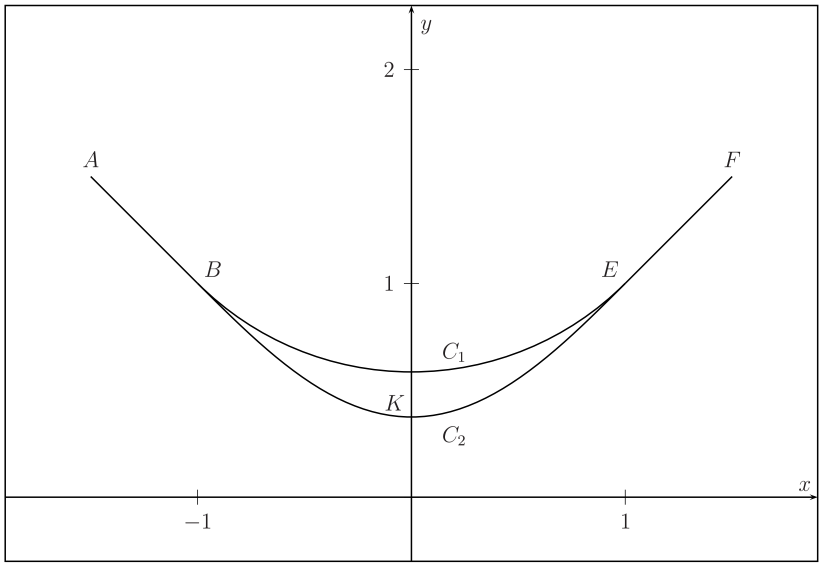
4°) Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f''(1)$ en fonction des coefficients a, b et c.

5°) Résoudre le système $\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b=1 \\ 12a+2b=0 \end{cases}$.

6°) Montrer que $f(x) = \dfrac{-x^4+6x^2+3}{8}$.

Calculer la courbure au point K de la courbe C_2 d'abscisse 0.

En déduire le rayon de courbure en K puis les coordonnées du centre de courbure Ω_2.



- ANNEXE à rendre avec la copie -

Figure de l'exercice 1 :