## EXERCICE 1 *(10 points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ d'unité 1 cm.

Soit $(C)$ la courbe d'équation polaire : $r(\theta)=\dfrac{6}{2+\cos\theta}\quad(\theta\in\mathbb{R})$.

1°) Montrer que, pour tracer la courbe $(C)$, il suffit de la tracer sur $[0\,;\pi]$.

2°) Soit $M$ un point de coordonnées polaires $(r\,;\theta)$. Donner, en fonction de $r$ et de $\theta$, ses coordonnées cartésiennes

3°) Montrer que si $M$, de coordonnées cartésiennes $(x\,,y)$, appartient à $(C)$, alors : $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.
*On admettra la réciproque.*

4°) Reconnaître la nature de la conique d'équation $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$. Préciser l'axe focal, les foyers et les sommets de cette conique.

5°) Tracer soigneusement la courbe $(C)$ pour $\theta\in[0\,;\pi]$. Expliquer comment obtenir le tracé de $(C)$ pour $\theta\in\mathbb{R}$. Tracer $(C)$.

6°) Soit $A$ le point de $(C)$ défini par $\theta=0$. Montrer que le rayon de courbure au point $A$ vaut 3.
On rappelle que $R=\dfrac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{r^2+2r'^2-rr''}$.

7°) Déterminer une équation cartésienne du cercle de courbure au point $A$.



## EXERCICE 2 *(10 points)*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$.
Sur la sphère $(S)$ de centre $O$ et de rayon 1, on considère les points $A$, $B$, $C$ de coordonnées :

$A\begin{cases}\text{longitude } 0°\\ \text{latitude } 45° \text{ Nord}\end{cases}\qquad B\begin{cases}\text{longitude } 90° \text{ Est}\\ \text{latitude } 0°\end{cases}\qquad C\begin{cases}\text{longitude } 90° \text{ Est}\\ \text{latitude } 60° \text{ Nord}\end{cases}$

1°) Faire une figure.

2°) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points $A$, $B$ et $C$.

3°) Calculer les longueurs des côtés du triangle sphérique $(ABC)$.

4°) Soit $I$ l'inversion de pôle $B$ et de puissance 2.

a) Déterminer l'image de la sphère, privée du point $B$, par l'inversion $I$.

b) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points $A'$ et $C'$, images respectives des points $A$ et $C$ par l'inversion $I$.

5°) Montrer qu'une équation cartésienne du plan $(OAB)$ est $z=x$.

6°) On désigne par $(\Gamma)$ la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases}x(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\\ y(t)=\sin t\\ z(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\end{cases}$$

a) Montrer que $(\Gamma)$ est contenue dans le plan $(OAB)$.

b) Montrer que $(\Gamma)$ est contenue dans la sphère $(S)$.

c) En déduire que, si $M$ est un point appartenant à $(\Gamma)$, alors il appartient à un cercle $(\mathscr{C})$ que l'on caractérisera.

d) On admet que $(\Gamma)$ et $(\mathscr{C})$ sont confondus. Déterminer l'image de la courbe $(\Gamma)$ privée du point $B$ par l'inversion $I$.