Exercice I (10 points)

Le but de cet exercice est l'étude d'une courbe plane, appelée lemniscate, que l'on peut rencontrer lors de l'élaboration de certains raccordements routiers.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ (unité 5 cm). On note C la courbe définie en coordonnées polaires par :

$$r = f(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)} \quad \text{pour} \quad \theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}\right].$$

1°) Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

a) A quel intervalle $\theta + \pi$ appartient-il ?

b) Calculer $f(\theta+\pi)$ en fonction de $f(\theta)$; en déduire une propriété de symétrie de la courbe C.

2°) Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$.

a) A quel intervalle $\frac{\pi}{2} - \theta$ appartient-il ?

b) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ en fonction de $f(\theta)$; en déduire une propriété de symétrie de la courbe C.

3°) Soit C_1 l'arc de courbe obtenu pour $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$. Comment obtient-on C à partir de C_1 ?

4°) Montrer que pour tout θ appartenant à $\left]0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $r' = f'(\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}$.

5°) Étudier le signe de $f'(\theta)$ sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$. En déduire les variations de f pour $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, puis dresser le tableau de variations de f sur ce dernier intervalle.

6°) On pose, pour tout $\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Montrer que :

$$x' = \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} \quad \text{et} \quad y' = \frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}.$$

7°) Déterminer un vecteur directeur de chacune des deux tangentes suivantes à la courbe C, l'une au point A de paramètre $\theta = \frac{\pi}{6}$ et l'autre au point B de paramètre $\theta = \frac{\pi}{4}$.

8°) Calculer $\lim\limits_{\theta \mapsto 0} \dfrac{y'}{x'}$. On admet que cette limite est le coefficient directeur de la tangente à C au point O. Caractériser la tangente à C au point O.

9°) Tracer soigneusement la courbe C, ainsi que les tangentes aux points O, A, B.

10°) On admet que le rayon de courbure au point B vaut $\frac{1}{3}$. Déterminer un vecteur directeur $\vec{n}$ de la normale au point B. Sur la même figure, construire le cercle de courbure en B.

Exercice II (10 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$. Les axes de coordonnées sont les axes (Ox), (Oy) et (Oz). Les plans de coordonnées sont les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz). La notation $M(x,\,y,\,z)$ désigne le point M de coordonnées x, y et z.

La figure sera construite et complétée sur l'annexe au fur et à mesure de l'avancement des questions.

Soit Δ la droite incluse dans le plan (Oyz), d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ 12y - 5z = 0 \end{cases}$

Soit Σ la sphère de centre $\Omega(0,\,3,\,2)$, tangente en $T(0,\,3,\,0)$ au plan (Oxy).

1°) a) Montrer que la sphère Σ a pour équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 4z + 9 = 0$.

b) Montrer que la droite Δ et la sphère Σ ont pour unique point commun $A\left(0,\,\frac{15}{13},\,\frac{36}{13}\right)$. En déduire la position de la droite Δ par rapport à la sphère Σ.

2°) Soit (P) le plan perpendiculaire au point A à la droite Δ.

a) Montrer que (P) a pour équation $5y + 12z - 39 = 0$.

b) On note Δ_1, Δ_2, Δ_3 les droites intersections respectives de (P) avec les plans (Oyz), (Oxz) et (Oxy). Déduire de la question a) un système d'équations cartésiennes de chacune des droites Δ_1, Δ_2, Δ_3.

c) Compléter la figure donnée en annexe. En particulier, on reconnaîtra et on nommera les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3.

3°) Soit B le point de la sphère Σ, diamétralement opposé à T.
On note T' le point de coordonnées $(3,\,0,\,0)$

a) Déterminer les coordonnées de B et placer ce point sur la figure en annexe.

b) Écrire une équation du plan (P') déterminé par les droites (TB) et (TT').

c) Montrer que les plans (P) et (P') sont sécants suivant une droite (D) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 12t \\ y = -12t + 3 \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5t + 2. \end{cases}$

d) Déterminer les coordonnées du point I, intersection de (D) avec le plan (Oxz).

4°) Soit Γ_1 le grand cercle intersection du plan (P) et de la sphère Σ. Soit Γ_2 le grand cercle intersection du plan (P') et de la sphère Σ. Les deux grands cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points. On note C le point d'abscisse positive. On obtient ainsi un triangle sphérique ABC tracé sur la sphère Σ.

a) Compléter la figure donnée en annexe ; reconnaître et nommer Γ_1 et Γ_2.

Avec les notations habituelles, on rappelle les « formules fondamentales » :

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A} \\ \cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos a \end{cases}$$

b) Montrer que le triangle sphérique ABC est rectangle en A. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega B}$. En déduire une valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle géométrique $\widehat{A\Omega B}$.

c) Nommer deux plans de la figure déterminant l'angle $\hat{B}$ du triangle sphérique ABC.

d) En déduire que sa mesure est 45°. Calculer des valeurs approchées de $\hat{C}$, b, a.

Figure de l'exercice 2