Exercice I (10 points)

- Partie A -

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ (unité graphique sur chaque axe : 4 cm).
On considère la courbe paramétrée E d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = 2\sin 2t \end{cases}$$

1°) Faire l'étude de cette courbe paramétrée après avoir justifié que l'intervalle d'étude peut se réduire à $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

2°) Tracer la courbe E.

3°) Montrer que cette courbe est en fait une ellipse dont on calculera les éléments caractéristiques.

- Partie B -

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$, on considère le cercle C de centre O contenu dans le plan $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ ayant pour rayon le demi grand axe de l'ellipse E.

Soient A et B deux points de l'espace de coordonnées respectives $(\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,;\,0)$ et $(\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{2}\,;\,0)$.

1°) Soit S la sphère obtenue en faisant tourner C autour de l'axe (Ox).
Écrire une équation de la sphère S.

2°) Montrer que les points A et B appartiennent à la sphère S.

3°) Soit N le pôle nord de la sphère S. Déterminer les coordonnées sphériques des points N, A et B.

4°) Déterminer les 6 éléments caractéristiques du triangle sphérique NAB.

5°) Calculer l'aire du triangle sphérique NAB.
On rappelle les formules concernant un triangle sphérique ABC :
$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos A$
$\text{aire}(ABC) = (A + B + C - \pi).R^2$
(R = rayon de la sphère).

Exercice II (10 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$. Soit $K(0\,;\,0\,;\,3)$ et C le cône de révolution d'axe $(O\,;\vec{k})$ et de demi angle au sommet $\frac{\pi}{4}$.

1°) Montrer qu'une équation cartésienne de C est $x^2 + y^2 = (3 - z)^2$.

2°) Soit E l'intersection du cône C et du plan d'équation $z = 0$. Donner une équation cartésienne de E, sa nature et ses éléments caractéristiques.

3°) Soit $\Omega(-3\,;\,0\,;\,0)$ et soit I la transformation de l'espace qui, à tout point M de l'espace, associe le point M' qui vérifie $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{6}{\Omega M^2}\,\overrightarrow{\Omega M}$.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de I.

b) Soit $A(3\,;\,0\,;\,0)$ et $B(0\,;\,3\,;\,0)$. Déterminer $A' = I(A)$ et $B' = I(B)$.

c) Soit D la droite de l'espace déterminée par :

$$D \begin{cases} x = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'image de E par I est la droite D.

4°) Soit Δ la droite de l'espace de représentation paramétrique $\Delta \begin{cases} x(t) = -\frac{9}{4} \\ y(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases}$

a) Soit $M(x(t)\,;\,y(t)\,;\,z(t))$ un point de Δ. Soit $M'(x'(t)\,;\,y'(t)\,;\,z'(t))$ son image par I. Montrer que : $x'(t) = \dfrac{\frac{45}{16} - 3t^2}{\frac{9}{16} + t^2}$; $y'(t) = \dfrac{6t}{\frac{9}{16} + t^2}$; $z'(t) = 0$.

b) En déduire que l'image de la droite Δ par I est contenue dans la sphère S, de centre $F(1\,;\,0\,;\,0)$ et de rayon 4.