

EXERCICE I (5 points)

La molécule de méthane est composée d'un atome de carbone et de quatre atomes d'hydrogène. Les quatre atomes d'hydrogène occupent les sommets d'un tétraèdre régulier $ABCD$; l'atome de carbone est au centre O de ce tétraèdre.

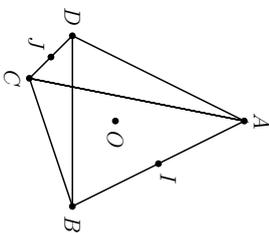
On se propose de mesurer de deux façons l'angle formé par deux liaisons carbone-hydrogène (par exemple l'angle \widehat{BOC}).

1ère méthode : I est le milieu du segment $[AB]$

J est le milieu du segment $[CD]$

1°) Justifier brièvement que O est le milieu de $[IJ]$.

2°) On note u la longueur commune des quatre côtés du tétraèdre. $u = AB$. Exprimer, en fonction de u , les longueurs AI, AJ, IJ, OI , des segments $[AI], [AJ], [IJ], [OI]$.



3°) On prend $OA = 1$, c'est-à-dire le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, comme unité de longueur. Calculer u .

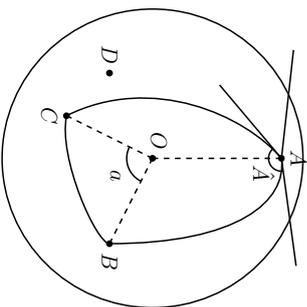
4°) Calculer une ligne trigonométrique (sinus, cosinus ou tangente) de l'angle \widehat{AOI} puis en déduire une valeur approchée, à $0,01^\circ$ près, de la mesure en degré décimal de \widehat{AOB} .

2ème méthode :

À partir des quatre sommets du tétraèdre régulier, on peut découper la sphère de centre O et de rayon $OA = 1$, en quatre triangles sphériques équilatéraux.

1°) Calculer l'aire d'un des quatre triangles sphériques équilatéraux, tel que ABC . Calculer la mesure \hat{A} en radians d'un angle de ce triangle sphérique.

2°) De la formule classique, dans un triangle sphérique, avec les notations habituelles, $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}$, déduire $\cos a$ et retrouver la mesure de \widehat{AOB} en degré décimal.



EXERCICE II (7 points)

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par \mathcal{C} la courbe définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x = f(t) = t\sqrt{1-t^2} \\ y = g(t) = (1+t^2)\sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

1°) Montrer que \mathcal{C} admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

2°) Dresser le tableau des variations de f et de g pour $t \in [-1; 1]$.

3°) Calculer $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)}{g(t)}$ et en déduire le coefficient directeur de la tangente à (\mathcal{C}) en l'origine O .

4°) Tracer la courbe \mathcal{C} . (On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 10$ cm).

5°) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} .

Nota bene : L'aire de la partie du plan limitée par cette boucle est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^1 g(t) f'(t) dt, \text{ en unités d'aire.}$$

EXERCICE III (8 points)

A, R et C sont trois points non alignés du plan. P désigne un point variable du secteur angulaire \widehat{ARC} tel que les cercles Γ et Γ' de centres O et O' , circonscrits aux triangles ARP et CRP , soient différents. (voir le schéma sur la feuille-réponse pour tracer les éléments géométriques des parties A et B du problème).

A - UTILISATION D'UNE INVERSION (3 points)

Soit I l'inversion de pôle R et de puissance $k = RA.RC$, où RA et RC sont les longueurs des segments.

1°) Montrer que le point $A' = I(A)$ vérifie : $RA' = RC$. Sur le schéma, placer A' et $C' = I(C)$.

2°) Préciser la nature des ensembles $E = I(\Gamma)$ et $E' = I(\Gamma')$. Tracer avec précision E et E' .

3°) Prouver que les ensembles E et E' ont un point commun unique, qu'on notera M .

Afin de faciliter les calculs, on choisit un repère orthonormal $(R; \vec{i}; \vec{j})$ d'origine R et tel que A soit sur l'axe des abscisses (*voir le schéma*). Dans ce repère, les points A et C (fixes) et P (variable), ont pour coordonnées : $A(-2; 0)$, $B(3; 4)$ et $P(a; b)$ avec $ab \neq 0$.

- 1°) Calculer les coordonnées de A' et de C' .
- 2°) On considère les angles géométriques (non orientés) $\alpha = \widehat{APR}$ et $\gamma = \widehat{CPR}$.
 - a) Quelle est l'image par l'inversion I du point P ? Montrer que $\widehat{AAM} = \alpha$.
 - b) Exprimer, en fonction de α , le coefficient directeur de la droite (MA) et en déduire une équation de cette droite.
- 3°) a) Vérifier que l'angle $(\vec{i}; \overrightarrow{RC})$ a une tangente égale à $4/3$.
 b) Justifier que $\widehat{RC'M} = \gamma$. En déduire la valeur de $\tan(\vec{i}; \overrightarrow{C'M})$ en fonction de $\tan \gamma$, puis une équation de la droite (MC') .

C - RELEVEMENT TOPOGRAPHIQUE (1 point)

Un observateur se repère par rapport à trois points géodésiques : une antenne TV A , un relais téléphonique R et un clocher C situés comme sur le schéma, les distances étant maintenant exprimées en km. Un théodolite, placé au point P , dans le secteur angulaire \widehat{ARC} , permet de mesurer les angles $\alpha = \widehat{APR} = 25$ gr et $\gamma = \widehat{CPR} = 70$ gr.

- 1°) Déduire du paragraphe B les coordonnées du point M à 1 m près.
- 2°) Calculer, à 1 m près, les coordonnées du point d'observation P .

