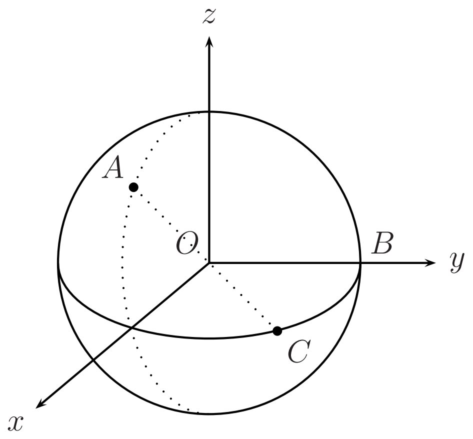
Corrigé du sujet 2007

Exercice I

1°) $\boxed{x = 2\cos\theta\cos\varphi\,;\ y = 2\sin\theta\cos\varphi\,;\ z = 2\sin\varphi}$.

2°)



3°) Équation cartésienne de la sphère (Σ) : $\boxed{x^2+y^2+z^2=4}$.

4°) Il suffit de remplacer x, y et z par leurs valeurs dans l'équation de (Σ).

5°) a) En utilisant le 1°), on trouve $\boxed{C\ (\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,;\,0)}$.

b) $\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OC} = 0\times\sqrt{2}+2\times\sqrt{2}+0\times 0 = \boxed{2\sqrt{2}}$;
$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC} = \sqrt{2}\times\sqrt{2}+0\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times 0 = \boxed{2}$;
$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = \sqrt{2}\times 0+0\times 2+\sqrt{2}\times 0 = \boxed{0}$.
On en déduit que

$\cos a = \cos(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) = \dfrac{\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OC}}{OB\times OC} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4}$ donc $\boxed{\cos a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

De même, $\boxed{\cos b = \dfrac{1}{2}}$ et $\boxed{\cos c = 0}$

Comme $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$, on a $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$. Comme ici les angles sont entre 0 et π, on obtient $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. Par conséquent, $\boxed{\sin a = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sin b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin c = 1}$.
On pouvait aussi trouver d'abord a, b et c.

c) En utilisant la formule fondamentale, on obtient :
$\cos\hat{A} = \dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ donc $\boxed{\hat{A}\approx 0,615 \text{ rad}}$.
Le plus rapide ensuite est d'utiliser la formule des trois sinus, ainsi :
$\dfrac{\sin\hat{B}}{\sin b} = \dfrac{\sin\hat{A}}{\sin a}$ donc $\sin\hat{B} = \sin b\times\dfrac{\sin\hat{A}}{\sin a}$ et $\sin\hat{C} = \sin c\times\dfrac{\sin\hat{A}}{\sin a}$.
Le problème est alors double : tout d'abord, on ne trouve pas la valeur exacte de $\hat{B}$ qui est $\dfrac{\pi}{4}$ rad (trouvable avec la formule fondamentale), ensuite l'angle $\hat{C}$ est supérieur à $\dfrac{\pi}{2}$ donc la calculatrice ne donne pas la bonne réponse. Concluons : $\boxed{\hat{B} = \dfrac{\pi}{4} \text{ rad}}$ et

$\hat{C}\approx\pi-0,955$ donc $\boxed{\hat{C}\approx 2,186 \text{ rad}}$.
Ensuite, la connaissance de leur cosinus donne a, b et c : $\boxed{a=\dfrac{\pi}{4}}$; $\boxed{b=\dfrac{\pi}{3}}$; $\boxed{c=\dfrac{\pi}{2}}$. Enfin $r = 2$, donc les longueurs des côtés du triangle sphèrique sont $2a$, $2b$ et $2c$ c'est-à-dire
$\boxed{\widehat{BC} = \dfrac{\pi}{2}\,;\ \widehat{AC} = \dfrac{2\pi}{3}\,;\ \widehat{AB} = \pi \text{ (unités de longueur)}}$.

d) L'aire du triangle sphèrique ABC est $(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi)\times r^2\approx\boxed{1,782}$ unités d'aires.

6°) a) Le pôle N est sur la sphère (Σ) donc l'image de la sphère (Σ) est $\boxed{\text{un plan } (P)}$ perpendiculaire à la droite (NO), passant par l'image d'un point de la sphère (Σ) (par exemple celle du point diamétralement opposé à N : le pôle sud de la sphère (Σ)).

Le vecteur $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (P) donc une équation de (P) s'écrit $0x+0y+2z+d=0$ donc $z=\lambda$. Quelle est l'image du pôle sud $S\,(0\,,\,0\,,\,-2)$, diamétralement opposé à N ?

On a $\overrightarrow{NS'} = \dfrac{k}{NS^2}\overrightarrow{NS} = \dfrac{8}{4^2}.\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ donc $x'=0\,;\,y'=0$ et $z'-2=-2$ donc $z'=0$. Comme $S'=O$ appartient à (P), on en déduit que $\boxed{\text{l'équation de } (P) \text{ est } z=0}$.

b) $\overrightarrow{NA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2}-2 \end{pmatrix}$

donc $NA^2 = 2 + (\sqrt{2}-2)^2 = 8 - 4\sqrt{2}$

d'où $\dfrac{8}{NA^2} = \dfrac{8}{8-4\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{2(2+\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2} = 2+\sqrt{2}$.

Donc $\overrightarrow{NA'} = (2+\sqrt{2})\overrightarrow{NA} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}+2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ce qui donne

$x' = 2\sqrt{2}+2$; $y' = 0$ et $z' - 2 = -2$ donc $z' = 0$.

$\boxed{\text{Les coordonnées de } A' \text{ sont donc } \left(2\sqrt{2}+2\,;\,0\,;\,0\right)}$.

$\overrightarrow{NB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $NB^2 = 8$ d'où

$\overrightarrow{NB'} = \dfrac{8}{8}\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NB}$ donc $\boxed{B' = B}$.

$\overrightarrow{NC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $NC^2 = 8$ d'où

$\overrightarrow{NC'} = \dfrac{8}{8}\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NC}$ donc $\boxed{C' = C}$.

Notez au passage que A', B' et C' appartiennent à (P).

c) On demande ici les distances « en ligne droite » :

$A'B' = \sqrt{(0-(2\sqrt{2}+2))^2 + (2-0)^2 + (0-0)^2} = \boxed{\sqrt{16+8\sqrt{2}}}$.

De même, $\boxed{A'C' = \sqrt{8+4\sqrt{2}}}$ et $\boxed{B'C' = \sqrt{8-4\sqrt{2}}}$.

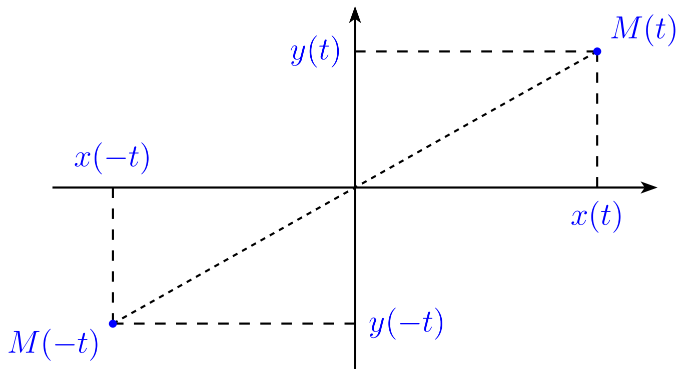
Exercice II

1°) Pour tout $t \in [-\pi\,;\,\pi]$, $x(-t) = \sin(-t) = -\sin(t) = -x(t)$ donc $\boxed{x \text{ est impaire}}$;

et $y(-t) = \sin(2(-t)) = \sin(-2t) = -\sin(2t) = -y(t)$ donc $\boxed{y \text{ est impaire}}$.

Les deux fonctions possédant une parité, on peut réduire l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ à $[0\,;\,\pi]$.

Un simple graphique nous permet de retrouver la symétrie induite par cette parité :



Quand on change t en $-t$, les coordonnées de M changent de signe toutes les deux donc $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à O : $\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C} \text{ est donc symétrique par rapport à } O}$.

2°) Pour tout $t \in [-\pi\,;\,\pi]$:

$x(\pi - t) = \sin(\pi - t) = \sin(t) = x(t)$

$y(\pi - t) = \sin(2(\pi - t)) = \sin(2\pi - 2t) = \sin(-2t) = -\sin(2t) = -y(t)$.

Quand on change t en $\pi - t$, l'abscisse ne change pas mais l'ordonnée change de signe donc $M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses : $\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C} \text{ est donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses}}$.

Sachant qu'il existe une relation (de symétrie) entre les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$, on peut réduire l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ à $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ (parce que si $t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $\pi - t \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$).

3°) Étude des variations sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$x'(t)=\cos(t)$ qui reste positif sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$y'(t) = 2\cos(2t)$. Si $t\in\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $2t\in[0\,;\,\pi]$ donc $\cos(2t)$ change de signe :

si $t\in\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ alors $2t\in\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(2t)\geqslant 0$ d'où $y'(t)\geqslant 0$;

si $t\in\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $2t\in\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ donc $\cos(2t)\leqslant 0$ d'où $y'(t)\leqslant 0$.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$			$+$		
$x(t)$	0	$\nearrow$			1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4°)

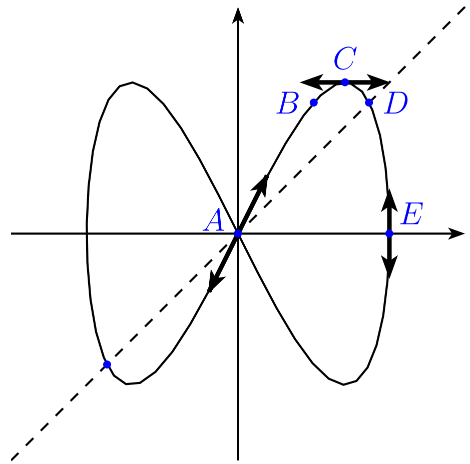
Point	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$x(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$y(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$x'(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$y'(t)$	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	-2

5°) Tangentes : on rappelle que si le vecteur $\vec{M}'(t)\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$ n'est pas nul alors il dirige la tangente.

Au point A (confondu avec O) : on a $\vec{M}'(0)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Sur le graphique, on a indiqué la direction de ce vecteur.

Au point C : on a $\vec{M}'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$ qui est colinéaire à $\vec{\imath}$ (tangente horizontale).

Au point E : on a $\vec{M}'(\pi)\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ qui est colinéaire à $\vec{\jmath}$ (tangente verticale).



6°) Comme $\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$:

$$\begin{aligned}\sin(t)=\sin(2t) &\iff \sin(t)=2\sin(t)\cos(t)\\ &\iff \sin(t)(1-2\cos(t))=0\\ &\iff \sin(t)=0 \text{ ou } 1-2\cos(t)=0\\ &\iff \sin(t)=0 \text{ ou } \cos(t)=\frac{1}{2}\\ &\iff t=0 \text{ ou } t=\pi \text{ ou } t=\frac{\pi}{3} \text{ ou } t=-\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Les points de la courbe situés sur la droite d'équation $y=x$ sont donc : le point O (pour $t=0$ et $t=\pi$) ; pour $t=\dfrac{\pi}{3}$: on obtient le point de coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; pour $t=-\dfrac{\pi}{3}$: on obtient le point de coordonnées $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (voir le graphique).