CORRIGÉ DU SUJET 2006

Exercice I

1°) Périodicité de la fonction r : pour tout θ réel, on a $r(\theta+2\pi) = \dfrac{6}{2+\cos(\theta+2\pi)} = \dfrac{6}{2+\cos(\theta)} = r(\theta)$.

La fonction r est 2π-périodique, il suffit de l'étudier sur $[-\pi\,;\,\pi]$ (qui est bien un intervalle d'amplitude 2π).

Parité de la fonction r : pour tout θ réel, on a $r(-\theta) = \dfrac{6}{2+\cos(-\theta)} = \dfrac{6}{2+\cos(\theta)} = r(\theta)$.

La fonction r est paire, on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0\,;\,\pi]$.

2°) $x = r\cos\theta = \dfrac{6\cos\theta}{2+\cos\theta}$ et $y = r\sin\theta = \dfrac{6\sin\theta}{2+\cos\theta}$.

3°) Si $M\,(x,y)$ appartient à (C) alors $x = \dfrac{6\cos\theta}{2+\cos\theta}$ et $y = \dfrac{6\sin\theta}{2+\cos\theta}$ donc

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{y^2}{12} = \frac{\left(\frac{6\cos\theta}{2+\cos\theta}+2\right)^2}{16}+\frac{\left(\frac{6\sin\theta}{2+\cos\theta}\right)^2}{12} = \frac{1}{16}.\left(\frac{8\cos\theta+4}{2+\cos\theta}\right)^2+\frac{1}{12}.\frac{36\sin^2\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{(2\cos\theta+1)^2+3\sin^2\theta}{(2+\cos\theta)^2} =$$
$$\frac{4\cos^2\theta+4\cos\theta+1+3(1-\cos^2\theta)}{4+4\cos\theta+\cos^2\theta} = 1$$

4°) La conique d'équation $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12} = 1$ est une ellipse dont le centre a pour coordonnées $(-2\,,\,0)$, l'axe focal a pour équation $y=0$ (axe des abscisses) car $a>b$ (axe focal horizontal, donc d'équation $y = y_0 = 0$), les sommets ont pour coordonnées $(2\,,\,0)$ et $(-6\,,\,0)$:

$y = 0 \Rightarrow \dfrac{(x+2)^2}{16} = 1 \Rightarrow x+2 = \pm 4 \Rightarrow x = 2$ ou -6. Pour les foyers : $c = \sqrt{a^2-b^2} = 2$ donc les foyers ont pour coordonnées $(0\,,\,0)$ et $(-4\,,\,0)$.

5°) La fonction r étant paire (d'après le 1)), la partie de la courbe (C) correspondant à l'intervalle $[-\pi\,;\,0]$ s'obtient par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

6°) On a $r(\theta) = \dfrac{6}{2+\cos(\theta)} = 6\times\dfrac{1}{2+\cos(\theta)} = 6\times\dfrac{1}{u}$ donc $r'(\theta) = 6\times\left(-\dfrac{u'}{u^2}\right) = \dfrac{6\sin\theta}{(2+\cos(\theta))^2}$ et

$$r''(\theta) = \frac{6\cos\theta(2+\cos\theta)^2-2(2+\cos\theta).(-\sin\theta).6\sin\theta}{(2+\cos(\theta))^4} = \frac{6\cos\theta(2+\cos\theta)+12\sin^2\theta}{(2+\cos(\theta))^3}.$$

Donc $r(0) = \dfrac{6}{3} = 2$, $r'(0) = \dfrac{0}{9} = 0$, $r''(0) = \dfrac{18}{27} = \dfrac{2}{3}$ d'où $R = \dfrac{(2^2+0^2)^{3/2}}{2^2+2.0^2-2.2/3} = \dfrac{8}{8/3} = 3$.

7°) Le point A a pour coordonnées polaires $(2\,;\,0)$ donc pour coordonnées cartésiennes $x_A = 2\cos 0 = 2$ et $y_A = 2\sin 0 = 0$.

Le vecteur $r'(0)\vec{u}_0 + r(0)\vec{v}_0 = 0\vec{\imath}+2\vec{\jmath} = 2\vec{\jmath}$, non nul, est un vecteur directeur de la tangente à la courbe en A : celle-ci est donc verticale. Le premier vecteur du repère de Frenet est $\vec{T} = \vec{\jmath}$. Le second vecteur est alors $\vec{N} = -\vec{\imath}$ (pour que la base $(\vec{T},\vec{N})$ soit orthonormée directe). Le centre de courbure, défini par $\overrightarrow{A\Omega} = R\vec{N} = -3\vec{\imath}$ a pour coordonnées $(x_A-3 = -1\,;\,y_A = 0)$ (on remarquera qu'il est à l'intérieur de l'ellipse). L'équation du cercle de courbure en A est donc $(x-(-1))^2+(y-0)^2 = 3^2$ donc $(x+1)^2+y^2 = 9$.

Exercice II

2°) $x_A = r\cos 0 \cos 45 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y_A = r\sin 0 \cos 45 = 0$, $z_A = r\sin 45 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,0\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$x_B = r\cos 90 \cos 0 = 0$, $y_B = r\sin 90 \cos 0 = 1$, $z_B = r\sin 0 = 0$ donc $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$.

$x_C = r\cos 90 \cos 60 = 0$, $y_C = r\sin 90 \cos 60 = \dfrac{1}{2}$, $z_C = r\sin 60 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. donc $C\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3°) Le rayon de la sphère est 1 donc les longueurs des côtés sont les mesures en radians des angles au centre. Par lecture graphique, on trouve $c = \widehat{AOB} = \dfrac{\pi}{2}$ et $a = \widehat{COB} = \dfrac{\pi}{3}$. Pour le dernier angle, on peut utiliser le produit scalaire : $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC} = (x_A - 0)(x_C - 0) + (y_A - 0)(y_C - 0) + (z_A - 0)(z_C - 0) = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ et $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC} = OA.OC.\cos\widehat{OAC} = \cos\widehat{OAC}$ donc $\cos\widehat{OAC} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ d'où $b = \widehat{OAC} \approx 0,91$ radians.

4°) a) Le pôle B est sur la sphère (S) donc l'image de (S) est un plan (P) perpendiculaire à la droite (BO).

Le vecteur $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ est normal à plan (P) donc une équation de (P) s'écrit $0x + 1y + 0z + d = 0$ donc $y = -d$. Quelle est l'image du point $K\,(0\,,\,-1\,,\,0)$ diamétralement opposé à B ?

On a $\overrightarrow{BK'} = \dfrac{k}{BK^2}\overrightarrow{BK} = \dfrac{1}{2}.\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ donc $x' = 0\,; y' - 1 = -1$ donc $y' = 0$ et $z' = 0$. Comme $K' = O$ appartient à (P), on en déduit que l'équation de (P) est $y = 0$.

b) $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\-1\\\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ donc $BA^2 = 2$ d'où $\overrightarrow{BA'} = \dfrac{2}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$ donc $A' = A$.

$\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\-\dfrac{1}{2}\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ donc $BC^2 = 1$ d'où $\overrightarrow{BC'} = \dfrac{2}{1}\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}0\\-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ donc $x_{C'} - 0 = 0$; $y_{C'} - 1 = -1$ et $z_{C'} - 0 = \sqrt{3}$ d'où $B'\,(0\,;\,0\,;\,\sqrt{3})$.

Notez au passage que A' et B' appartiennent à (P).

5°) Une méthode : notons $ax + by + cz + d = 0$ l'équation de (OAB). Alors :

$O \in (OAB)$ donc $0 + 0 + 0 + d = 0$ d'où $d = 0$.

$A \in (OAB)$ donc $a \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 0 + c \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$ d'où $a = -c$.

$B \in (OAB)$ donc $0 + b + 0 = 0$ d'où $b = 0$.

Donc l'équation de (OAB) s'écrit $ax - az = 0$ donc $z = x$ (a ne peut pas être égal à 0, sinon ce ne serait plus l'équation d'un plan).

On pouvait aussi utiliser le produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ qui donne un vecteur normal au plan donc les trois premiers coefficients de son équation.

6°) a) Pour tout point $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ de (Γ), on a $z = z(t) = x(t) = x$ donc tout point de (Γ) appartient à (OAB) donc $(\Gamma) \subset (OAB)$.

b) L'équation de (S) est $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Pour tout point $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ de (Γ), on a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)^2 + (\sin t)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\cos^2 t + \sin^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \end{aligned}$$

donc M appartient à (S) : $(\Gamma) \subset (S)$.

c) (Γ) est contenue dans le plan (OAB) et dans la sphère (S), ces deux derniers sont sécants en deux points

(A et B) donc (Γ) est contenue dans le cercle $(\mathscr{C})$, intersection du plan (OAB) et de la sphère (S).

d) Le plan (OAB), privé de B est globalement invariant par I (il passe par le pôle B). La sphère (S) a pour image le plan (P), d'équation $y = 0$. Donc le cercle (Γ) (privé de B) a pour image l'intersection des plans (OAB) et (P) donc la droite de représentation paramétrique : $\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{array} \right.$.