Corrigé du sujet 2003

Exercice I

- Partie A -

1°) $\boxed{x \text{ et } y \text{ sont } \pi\text{–périodiques}}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$x(t+\pi) = \cos(2(t+\pi)) = \cos(2t+2\pi) = \cos(2t) = x(t)$ et $y(t+\pi) = 2\sin(2(t+\pi)) = 2\sin(2t+2\pi) = 2\sin(2t) = y(t)$.
Ceci permet de réduire l'intervalle d'étude à $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(-t) = \cos(2(-t)) = \cos(-2t) = \cos(2t) = x(t)$ donc $\boxed{x \text{ est paire}}$. et $y(-t) = 2\sin(2(-t)) = 2\sin(-2t) = -2\sin(2t) = -y(t)$ donc $\boxed{y \text{ est impaire}}$.
Les deux fonctions possédant une parité, on peut encore réduire cet intervalle à $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Étude de la courbe :
$x'(t) = -2\sin(2t)$. Si $t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $2t \in [\,0\,;\,\pi\,]$ donc $\sin(2t) \geqslant 0$ d'où $x'(t) \leqslant 0$.
$y'(t) = 4\cos(2t)$. Si $t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $2t \in [\,0\,;\,\pi\,]$ donc $\cos(2t)$ change de signe :
si $t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ alors $2t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(2t) \geqslant 0$ d'où $y'(t) \geqslant 0$;
si $t \in \left[\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $2t \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ donc $\cos(2t) \leqslant 0$ d'où $y'(t) \leqslant 0$.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$			$-$		
$x(t)$	1		$\searrow$		-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3°) Pour tout point de E, on a $x(t) = \cos 2t$ et $y(t) = 2\sin 2t$ donc $x^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = (\cos 2t)^2 + (\sin 2t)^2 = 1$ d'où $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.
Cette dernière équation est celle d'une ellipse donc E est *contenue* dans une ellipse.
Réciproquement, soit M un point de cette ellipse. On a alors : $x^2 = 1 - \dfrac{y^2}{4}$. Or $-\dfrac{y^2}{4} \leqslant 0$ donc $x^2 \leqslant 1$ c'est-à-dire $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Il existe alors un nombre u tel que $x = \cos u$, ou encore, en posant $t = \dfrac{u}{2}$, $x = \cos(2t)$. En remplaçant dans $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, on obtient $y = \pm 2\sin(2t)$ donc (en considérant la parité de x et de y) M appartient à E.
On pouvait aussi invoquer le fait que x varie de -1 à 1 et que y varie de -2 à 2 (avec la symétrie obtenue grâce aux parités) et ce, de façon continue (les fonctions x et y sont continues) donc la courbe E correspond bien à l'ellipse complète.
Rédaction alternative : $\begin{cases} x(t) = x_0 + a\cos t \\ y(t) = y_0 + b\sin t \end{cases}$ est la représentation paramétrique de l'ellipse de centre $(x_0\,;\,y_0)$ et d'axes a et b.
Ici, $a = 1$ et $b = 2$, donc l'étude faite au 1°) montre que la courbe E est l'ellipse entière.
Éléments caractéristiques :
$\boxed{\text{centre } O}$; $\boxed{\text{demi grand-axe } b = 2}$, $\boxed{\text{demi petit-axe } a = 1}$; $\boxed{\text{axe focal vertical}}$ (car $b > a$), d'équation $x = x_0$ donc $\boxed{x = 0}$; sommets de coordonnées $\boxed{(x_0 = 0\,;\,y_0 + b = 2)}$ et $\boxed{(x_0 = 0\,;\,y_0 - b = -2)}$; foyers de coordonnées $\boxed{\left(x_0 = 0\,;\,y_0 + c = \sqrt{3}\right)}$ et $\boxed{\left(x_0 = 0\,;\,y_0 - c = -\sqrt{3}\right)}$ car $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3}$.

- Partie B -

1°) Le centre de S est celui de C, c'est-à-dire O (on notera que O est sur l'axe de rotation). Le rayon de S est celui de C, c'est-à-dire 2.
L'équation de la sphère S s'écrit donc $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ d'où $\boxed{x^2+y^2+z^2=4}$.

2°) Il suffit de vérifier que les coordonnées de A et B satisfont l'équation de la sphère S.

3°) N étant le pôle nord, ses coordonnées sphériques sont $\left(2\,;\,0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Pour le A, on utilise les formules $\begin{cases} x=R\cos\theta\cos\varphi \\ y=R\sin\theta\cos\varphi \\ z=R\sin\varphi \end{cases}$ qui donnent $2\sin\varphi=z_A=0$ donc $\varphi=0$ d'où $\cos\varphi=1$ puis $2\cos\theta\times 1=x_A=\sqrt{2}$ d'où $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Les coordonnées sphériques de A sont donc $\boxed{\left(2\,;\,\dfrac{\pi}{4}\,;\,0\right)}$.

Pour B, on trouve de la même façon $\boxed{\left(2\,;\,-\dfrac{\pi}{4}\,;\,0\right)}$.

4°) Une simple lecture graphique donne ici $\boxed{a=b=n=\dfrac{\pi}{2}}$ et $\boxed{\hat{A}=\hat{B}=\hat{N}=\dfrac{\pi}{2}}$.

Remarque : on a donc donc $\widehat{AB}=\widehat{AN}=\widehat{NB}=2\times\dfrac{\pi}{2}=\pi$.

5°) L'aire du triangle sphérique NAB est $(\hat{A}+\hat{B}+\hat{N}-\pi)\times R^2=\boxed{2\pi}$ unités d'aires.

Exercice II

1°)
$$\begin{aligned}
M\,(x\,;\,y\,;\,z)\in C &\iff (\overrightarrow{KM},\vec{k})=\frac{\pi}{4}\text{ ou }\pi-\frac{\pi}{4}\\
&\iff \overrightarrow{KM}.\vec{k}=KM\times 1\times\left(\pm\cos\frac{\pi}{4}\right)\\
&\iff z-3=\pm\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\iff (z-3)^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2+(z-3)^2)\\
&\iff 2(z-3)^2=x^2+y^2+(z-3)^2\\
&\iff (z-3)^2=x^2+y^2 \iff (3-z)^2=x^2+y^2.
\end{aligned}$$
Car $z-3$ et $3-z$ sont opposés et ont donc le même carré.
Ce calcul est valable pour $M\neq K$ mais K vérifie quand même l'équation finale.

2°) En remplaçant z par 0 dans l'équation précédente, on trouve $x^2+y^2=9$ qui est, *dans le plan d'équation* $z=0$, l'équation du cercle de centre O et de rayon 3.

3°) a) Pour tout point M et son image M' par I, on a :
– on a $\overrightarrow{\Omega M'}=\dfrac{6}{\Omega M^2}\overrightarrow{\Omega M}=\lambda\overrightarrow{\Omega M}$; les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ sont colinéaires donc Ω, M et M' sont alignés ;
– on a aussi $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{\Omega M'}=\overrightarrow{\Omega M}.\dfrac{6}{\Omega M^2}\overrightarrow{\Omega M}=\dfrac{6\,\Omega M^2}{\Omega M^2}=6$ (constante).

La transformation I est donc l'$\boxed{\text{inversion de pôle }\Omega\text{ et de rapport }6}$.

b) On trouve, en traduisant la relation $\overrightarrow{\Omega M'}=\dfrac{6}{\Omega M^2}\overrightarrow{\Omega M}$ en coordonnées, que (...) $\boxed{A'\,(-2\,;\,0\,;\,0)}$ et $\boxed{B'\,(-2\,;\,1\,;\,0)}$.

Remarque : on sait que $A'\in(\Omega A)$ donc A' est sur les plans d'équation $y=0$ et $z=0$. Ses coordonnées sont donc $(x'\,;\,0\,;\,0)$. La relation $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega A'}=6$ devient ensuite $6(x'+3)=6$ d'où $x'=-2$.

c) – Les coordonnées de Ω vérifient l'équation du cône C et l'équation $z = 0$ donc Ω appartient à E. Ainsi, le cercle E passe par le pôle Ω donc son image est une droite Γ perpendiculaire au diamètre $[\Omega O]$ (et contenue dans le plan contenant le cercle E).

– Les points A et B appartiennent au cercle E car leurs coordonnées vérifient $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$

– Les points A' et B' appartiennent donc à la droite Γ.

– Les points A' et B' appartiennent aussi à la droite D car leurs coordonnées vérifient $\begin{cases} x = -2 \\ z = 0 \end{cases}$

Si deux droites ont deux points en commun alors elles sont confondues donc l'image Γ de E est D.

4°) a) On a $\overrightarrow{\Omega M'} = (\dfrac{6}{\Omega M^2}\overrightarrow{\Omega M})$ (relation (1)). Si M a pour coordonnées $\left(-\dfrac{9}{4}\,;\,t\,;\,0\right)$ alors $\overrightarrow{\Omega M}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{9}{4}+3\,;\,t\,;\,0\right)$ donc $\Omega M^2 = t^2 + \dfrac{9}{16}$. La relation (1) donne, pour la première coordonnée :

$$x' + 3 = \frac{6}{t^2 + \frac{9}{16}} \times \frac{3}{4} \text{ donc } x' = \frac{9/2}{t^2 + \frac{9}{16}} - 3 = \frac{9/2 - 3t^2 - 27/16}{t^2 + \frac{9}{16}} = \frac{45/16 - 3t^2}{t^2 + \frac{9}{16}}.$$

Les autres relations donnant y' et z' s'obtiennent de même.

b) Soit M un point de Δ et M' son image par I. On a alors

$$\begin{aligned}
FM'^2 &= \left(\frac{45/16 - 3t^2}{t^2 + 9/16} - 1\right)^2 + \left(\frac{6t}{t^2 + 9/16}\right)^2 + 0^2 = \left(\frac{1}{t^2 + 9/16}\right)^2 \left[\left(\frac{9}{4} - 4t^2\right)^2 + 36t^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{t^2 + 9/16}\right)^2 \left[\frac{81}{16} + 18t^2 + 16t^4\right] = \left(\frac{1}{t^2 + 9/16}\right)^2 \left(\frac{9}{4} + 4t^2\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{t^2 + 9/16}\right)^2 \times 16 \left(\frac{9}{16} + t^2\right)^2 = 16
\end{aligned}$$

donc $FM' = 4$: l'image de Δ par I est contenue dans la sphère S, de centre $F(1\,;\,0\,;\,0)$ et de rayon 4.