Brevet de technicien supérieur session 2013
Géomètre topographe

Exercice 1 : courbe plane **9 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$ représenté en annexe 1 .
On considère la courbe C, d'équation polaire

$$r(\theta) = 4\sin\theta\cos^2\theta \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}.$$

On note M_θ le point de C de coordonnées polaires $(r\ ;\ \theta)$.
Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de la courbe C et de la tracer.

A. Détermination de l'intervalle d'étude

1. Montrer que r est une fonction périodique de période 2π.
2. Étudier la parité de la fonction r.
   Que peut-on en conclure pour les points M_θ et $M_{-\theta}$ de la courbe C ?
3. Déduire des deux questions précédentes que l'intervalle d'étude de r peut être réduit à $[0\ ;\ \pi]$ et donner une propriété géométrique de la courbe C.
4. Comparer $r(\pi - \theta)$ et $r(\theta)$.
   Que peut-on en conclure pour les points M_θ et $M_{\pi-\theta}$ de la courbe C ?
   En déduire que l'étude de la fonction r peut être réduite à l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

B. Étude et tracé de la courbe C

1. On note r' la fonction dérivée de la fonction r.
   Montrer que $r'(\theta) = 4cos\theta\left(1 - 3\sin^2\theta\right)$.
2. Étudier le signe de la fonction r' pour tout réel de l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction r sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. Compléter le tableau de valeurs de l'annexe 1 avec des valeurs exactes.
4. Justifier que la tangente à la courbe C au point M_0 est l'axe $(\mathrm{O}x)$.
   On admettra qu'aux points $M_{\pi/6}$ et $M_{\pi/2}$ la tangente à la courbe C est « verticale » et qu'au point $M_{\pi/4}$ elle est « horizontale ».
5. Placer les points $M_0 ; M_{\pi/6}, M_{\pi/4}$ et $M_{\pi/2}$ sur le repère de l'annexe 1.
   Tracer les tangentes à la courbe C en ces quatre points.
6. Montrer que le rayon de courbure de la courbe C au point M_0 est 2.
   On admettra que $r''(\theta) = 4\sin\theta\left(2 - 9\cos^2\theta\right)$ et pour rappel : $R = \dfrac{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$. Donner les coordonnées cartésiennes du centre du cercle osculateur à la courbe C au point M_0.
7. Tracer le cercle osculateur à la courbe C au point M_0.
   Tracer la courbe C.

Exercice 2 : géométrie sphérique **11 points**

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, la Terre est assimilée à une sphère $\sum$ de centre O et de rayon 1.
Tout point de $\sum$ est alors repéré par le couple $(\theta\ ;\ \varphi)$ où θ est sa longitude et φ sa latitude (en radians).
Soient les points $\mathrm{N}\left(0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$; $\mathrm{S}\left(0\ ;\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right)$; $\mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$; $\mathrm{C}\left(0\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\mathrm{D}\left(\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right)$.

A. Trigonométrie sphérique

1. (a) Placer les points N, S, A, B, C et D sur la figure de l'annexe 2 page 5.
   (b) Tracer le triangle sphérique NBC.
2. (a) Donner les coordonnées cartésiennes des points N, S, A et D.
   (b) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points B et C.
3. Déterminer les six éléments du triangle sphérique NBC. Donner les valeurs exactes et ensuite les valeurs approchées en arrondissant à 10^{-2}.

B. Projection stéréographique de pôle A

On note I l'inversion de pôle A et de puissance 2.

1. (a) Justifier que les points N, C et S sont des points invariants par I.
   (b) Déterminer les coordonnées cartésiennes de l'image du point D par I.
   On admettra que B′, image du point B par I a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{2}-1\right)$.
2. Déterminer l'image de la sphère Σ privée du point A par I. Justifier votre réponse.

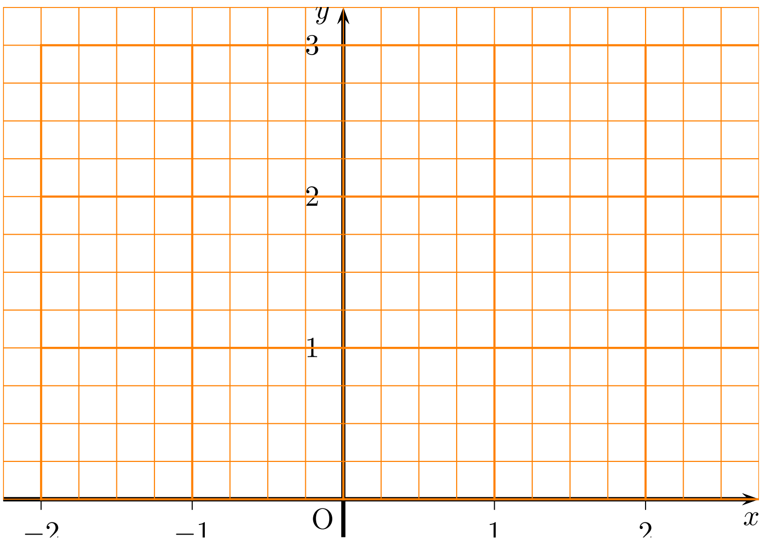
   L'objectif des deux questions suivantes est de représenter les images par I des deux triangles sphériques NDC et NBC.
3. (a) Quelle est l'image par I du grand cercle Γ_1 privé du point A passant par N et D ? Justifier votre réponse.
   (b) Quelle est l'image par I du grand cercle Γ_2 privé du point A passant par C et D ? Justifier votre réponse. Quelle est l'image par I du grand cercle Γ_3 passant par C et N ? Justifier votre réponse.
   Tracer sur le repère de l'annexe 2 l'image du triangle sphérique NDC.
4. (a) Quelle est la nature de l'image par I du grand cercle Γ_4 passant par B et C ? Justifier votre réponse.
   (b) En remarquant que le point C_1 diamétralement opposé au point C est invariant par I, construire l'image de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ dans le repère de l'annexe 2.
   Laisser apparents les traits de construction et surligner d'une couleur différente de celle utilisée dans la question 3. d. les contours de l'image du triangle sphérique NBC.

ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)

Exercice 1. Question B. 3

θ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$
r				
r'				

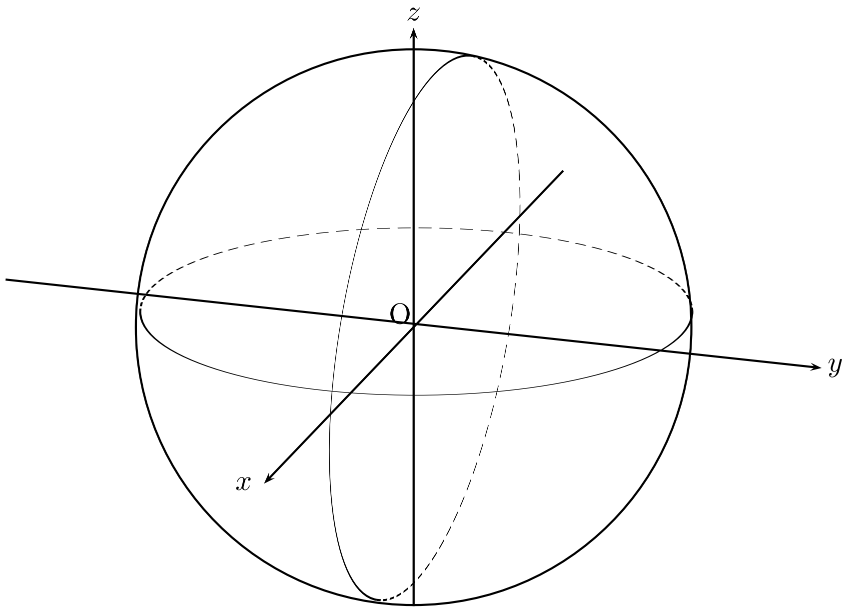
Exercice 1. Questions B. 5 et B. 7



ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

1cm

Exercice 2. Question A. 1



Exercice 2. Questions B. 3 et B. 4