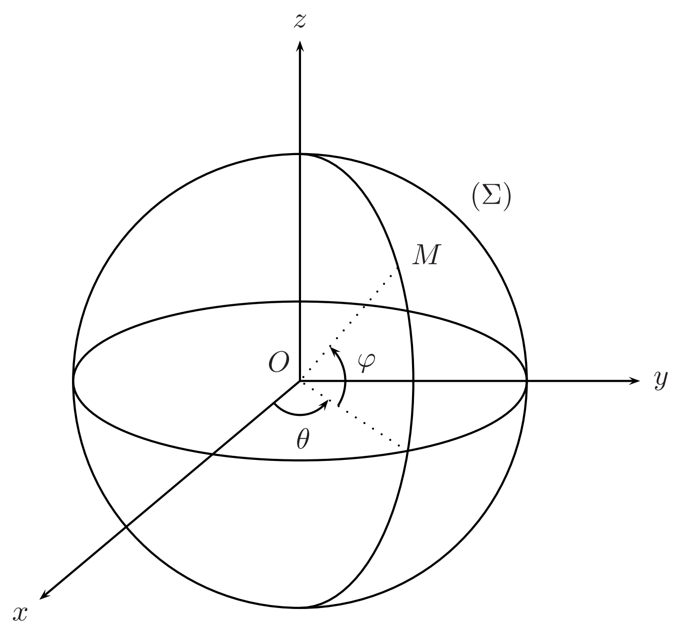
Exercice I (8 points)



L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

(Σ) est la sphère de centre O et de rayon 1.

Tout point de (Σ) est repéré par le couple $(\theta\,;\,\varphi)$ où θ est sa longitude et φ sa latitude (en radians). On considère sur (Σ) les points

$I\,(0\,;\,0)$, $J\left(\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right)$, $K\left(0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $A\left(\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $B\left(\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right)$

1°) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points I, J , K, A et B.

2°) Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OJ}$.

En déduire les longueurs des côtés du triangle sphérique ABJ en radians à 10^{-2} près.

3°) Calculer, en radians à 10^{-2} près, la mesure en radians de l'angle $\hat{A}$ du triangle sphérique ABJ.

Rappel :

Pour un triangle sphérique ABC, avec les notations usuelles de la trigonométrie sphérique on a :

$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos \hat{A}$.

4°) Soit (P) le plan passant par les points I, J et K. Écrire une équation cartésienne du plan (P).

5°) Montrer que le point H de coordonnées cartésiennes $H\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur le plan (P).

6°) En déduire la nature de l'intersection du plan (P) et de la sphère (Σ).

Préciser les éléments caractéristiques de cet ensemble.

Exercice II (12 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$ d'axes (Ox) et $(0y)$.

Soient A le point de coordonnées $A\,(1\ ;\ 0)$, (C) le cercle de diamètre $[OA]$, t un réel et (D_t) la droite passant par l'origine et par le point Q de coordonnées $(1\ ;\ t)$.

Partie A : Etude géométrique.

1°) a) Justifier que t est le coefficient directeur de la droite (D_t) et en déduire l'équation réduite de la droite (D_t).

b) Écrire une équation cartésienne du cercle (C).

2°) La droite (D_t) coupe le cercle (C) au point O et au point N.

Montrer que le couple de coordonnées $(X(t)\ ;\ Y(t))$ de N en fonction de t est : $N \left\{ \begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{1+t^2} \\ Y(t) &= \frac{t}{1+t^2} \end{aligned} \right.$

3°) Soit M le point du plan tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NQ}$.

Montrer que le couple de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t))$ de M en fonction de t est : $M \left\{ \begin{aligned} x(t) &= \frac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) &= \frac{t^3}{1+t^2} \end{aligned} \right.$

Partie B : Étude d'une courbe paramétrée.

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$, on désigne par (Γ) la courbe définie paramétriquement par : $(\Gamma) \left\{ \begin{aligned} x(t) &= \frac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) &= \frac{t^3}{1+t^2} \end{aligned} \right.$ où t décrit $\mathbb{R}$.

Pour $t \neq 0$, $M\,(x(t)\ ;\ y(t))$ est distinct du point O et on rappelle que t est le coefficient directeur de la droite (D_t).

1°) Montrer que la courbe (Γ) admet l'axe (Ox) comme axe de symétrie et en déduire que l'on peut étudier la courbe (Γ) pour $t \in [\,0\ ;\ +\infty\,[$.

2°) Étudier les limites des fonctions x et y quand t tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?

3°) Montrer que les fonctions x et y ont pour dérivées : $x'(t) = \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$ et $y'(t) = \dfrac{3t^2+t^4}{(1+t^2)^2}$.

4°) Étudier les variations des fonctions x et y pour $t \in [\,0\ ;\ +\infty\,[$ et représenter les résultats **dans le tableau de l'annexe**.

5°) Calculer : $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$. En déduire la tangente à la courbe (Γ) au point O.

6°) Tracer la courbe (Γ) dans le **repère représenté sur l'annexe**.

On placera les points de (Γ) pour les valeurs $t=1$, $t=2$ et $t=\sqrt{3}$.

Partie C : Étude d'une inversion.

On considère l'inversion I de pôle O et de puissance 1.

1°) Déterminer les coordonnées $x_1(t)$ et $y_1(t)$ du point M_1, image par l'inversion I du point $M\ \left(x(t)\,;\,y(t)\right)$ de la courbe (Γ) privée de O, en fonction de t ($t \neq 0$).

On rappelle la relation : $\overrightarrow{OM_1} = \dfrac{1}{OM^2}\,\overrightarrow{OM}$.

2°) Montrer que les coordonnées $x_1(t)$ et $y_1(t)$ du point M_1 vérifient l'équation $y^2 = x$.

3°) Préciser la nature de la courbe (P) d'équation : $y^2 = x$ et en donner les éléments caractéristiques.

4°) Tracer la courbe (P) dans **le repère de l'annexe**.

– ANNEXE à rendre avec la copie –

Exercice 2 : B) 4)

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$x'(t)$	
$x(t)$	
$y(t)$	
$y'(t)$	

Repère et figure de l'exercice 2 :