

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

GÉOMÈTRE/TOPOGRAPHE

session 2007

MATHÉMATIQUES

Durée : 2 h

Coefficient : 2

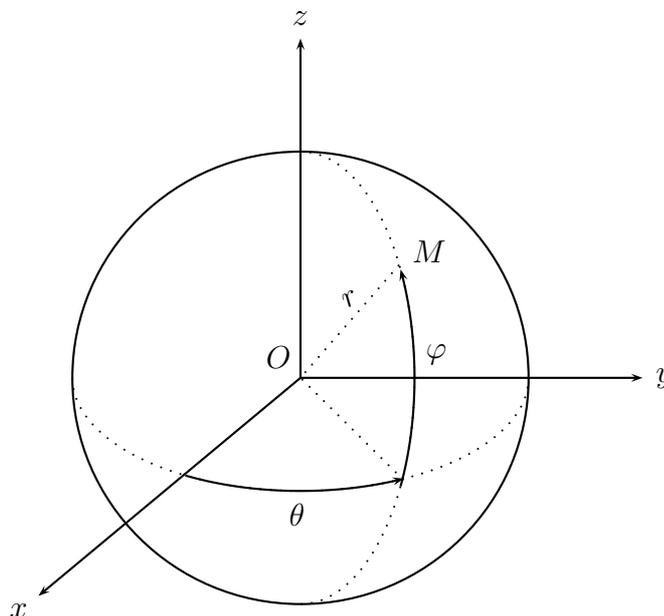
*Le sujet comporte deux exercices indépendants
qui seront traités sur des copies séparées.*

Il sera tenu compte de la présentation et de la
rédaction.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice I (11 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (Σ) est la sphère de centre O , de rayon 2. Tout point de (Σ) est repéré par sa longitude θ et sa latitude φ (en radians).



- 1°) Soit M un point de (Σ) . Écrire les coordonnées cartésiennes de M en fonction de θ et de φ .
- 2°) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.
- 3°) Donner une équation cartésienne de la sphère (Σ) .
- 4°) On considère les points A et B dont on donne les coordonnées cartésiennes :
 $A(\sqrt{2}; 0; \sqrt{2})$ et $B(0; 2; 0)$.
Montrer que A et B sont deux points de (Σ) .
- 5°) On considère le point C de (Σ) défini par $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\varphi = 0$.
 - a) Déterminer les coordonnées cartésiennes de C .
 - b) Calculer les produits scalaires $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$, $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$.
En déduire les valeurs exactes de $\cos a$, $\cos b$ et $\cos c$ où
 $a = \text{mes } \widehat{BOC}$, $b = \text{mes } \widehat{AOC}$, $c = \text{mes } \widehat{AOB}$,
puis celles de $\sin a$, $\sin b$ et $\sin c$.
 - c) Déterminer les dernières caractéristiques du triangle sphérique ABC .
 - d) Calculer, à 10^{-3} près, l'aire du triangle sphérique ABC .

- 6°) Soit N le pôle nord de la sphère (Σ) . Soit I l'inversion de pôle N et de puissance 8.
- Quelle est l'image de (Σ) , privée du point N , par l'inversion I ? En donner une équation.
 - Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A' , B' et C' , images respectives des points A , B et C par l'inversion I .
 - Calculer les distances $A'B'$, $A'C'$ et $B'C'$.

Exercice II (9 points)

La représentation paramétrique d'une courbe \mathcal{C} est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}, \quad t \in [-\pi; \pi]$$

- Étudier la parité des fonctions x et y ; en déduire une symétrie de la courbe. À quel intervalle peut-on restreindre l'étude?
- Calculer $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$; en déduire une nouvelle symétrie de la courbe.
- Étudier les variations des fonctions x et y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et dresser le tableau des variations.
- On note A , B , C , D et E les points de \mathcal{C} de paramètres respectifs 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$. Recopier et compléter le tableau suivant :

Point	A	B	C	D	E
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$x(t)$					
$y(t)$					
$x'(t)$					
$y'(t)$					

- Dans un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm), représenter les 5 points A , B , C , D et E avec les tangentes aux points A , C , E puis tracer la courbe \mathcal{C} .
- En utilisant le fait que, pour tout réel t , $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$, résoudre l'équation $\sin(t) = \sin(2t)$. En déduire les coordonnées des points de la courbe situés sur la droite d'équation $y = x$.