BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

GÉOMÈTRE/TOPOGRAPHE

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

Durée : 2 h **Coefficient : 2**

- SUJET -

Le sujet comporte deux exercices indépendants qui seront traités sur des copies séparées.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

EXERCICE 1 *(10 points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ d'unité 1 cm.

Soit (C) la courbe d'équation polaire : $r(\theta) = \dfrac{6}{2+\cos\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R})$.

1°) Montrer que, pour tracer la courbe (C), il suffit de la tracer sur $[\,0\,;\,\pi\,]$.

2°) Soit M un point de coordonnées polaires $(r\,;\,\theta)$. Donner, en fonction de r et de θ, ses coordonnées cartésiennes

3°) Montrer que si M, de coordonnées cartésiennes $(x\,,\,y)$, appartient à (C), alors :
$\dfrac{(x+2)^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$.
On admettra la réciproque.

4°) Reconnaître la nature de la conique d'équation $\dfrac{(x+2)^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$. Préciser l'axe focal, les foyers et les sommets de cette conique.

5°) Tracer soigneusement la courbe (C) pour $\theta \in [\,0\,;\,\pi\,]$. Expliquer comment obtenir le tracé de (C) pour $\theta \in \mathbb{R}$. Tracer (C).

6°) Soit A le point de (C) défini par $\theta = 0$. Montrer que le rayon de courbure au point A vaut 3.
On rappelle que $R = \dfrac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$.

7°) Déterminer une équation cartésienne du cercle de courbure au point A.

EXERCICE 2 *(10 points)*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
Sur la sphère (S) de centre O et de rayon 1, on considère les points A, B, C de coordonnées :

$$A\left\{\begin{array}{l}\text{longitude } 0°\\ \text{latitude } 45° \text{ Nord}\end{array}\right. \qquad B\left\{\begin{array}{l}\text{longitude } 90° \text{ Est}\\ \text{latitude } 0°\end{array}\right. \qquad C\left\{\begin{array}{l}\text{longitude } 90° \text{ Est}\\ \text{latitude } 60° \text{ Nord}\end{array}\right.$$

1°) Faire une figure.

2°) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A, B et C.

3°) Calculer les longueurs des côtés du triangle sphérique (ABC).

4°) Soit I l'inversion de pôle B et de puissance 2.

a) Déterminer l'image de la sphère, privée du point B, par l'inversion I.

b) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A' et C', images respectives des points A et C par l'inversion I.

5°) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (OAB) est $z = x$.

6°) On désigne par (Γ) la courbe définie paramétriquement par :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\\ y(t) = \sin t\\ z(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\end{array}\right.$$

a) Montrer que (Γ) est contenue dans le plan (OAB).

b) Montrer que (Γ) est contenue dans la sphère (S).

c) En déduire que, si M est un point appartenant à (Γ), alors il appartient à un cercle $(\mathscr{C})$ que l'on caractérisera.

d) On admet que (Γ) et $(\mathscr{C})$ sont confondus. Déterminer l'image de la courbe (Γ) privée du point B par l'inversion I.