BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

GEOMETRE TOPOGRAPHE

Epreuve : **MATHEMATIQUES**	Durée : 3 Heures	Coefficient : 2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage du formulaire officiel de mathématiques et des instruments de calcul est autorisé.

- SUJET -

Exercice I (11 points)

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ (unité : 5 cm).

On considère les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $x = 1$ et $x = -1$.

Une droite variable (D) passant par O et de coefficient directeur t ($t \in \mathbb{R}$) coupe (Δ) en P.

La parallèle à $(O;\vec{\imath})$ passant par P coupe (Δ') en P'.

1°) Faire une figure qui sera complétée dans les questions suivantes.

2°) Soit $M\,(x;y)$ le projeté orthogonal de P' sur la droite (D).

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{P'M}$.

b) En déduire que les coordonnées de M sont données par : $x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ et $y = t.\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.

3°) On désigne par (C) la courbe définie paramétriquement par : $x(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ et $y(t) = t.\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.

a) En étudiant la parité des fonctions x et y, donner un intervalle d'étude suffisant pour l'étude des variations de x et de y et pour le tracé de (C).

b) Vérifier que

$$x'(t) = \frac{4t}{(t^2+1)^2} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = \frac{(t^2+2-\sqrt{5})(t^2+2+\sqrt{5})}{(t^2+1)^2}.$$

c) Étudier les variations des fonctions x et y.

d) Déterminer les points d'intersection de (C) avec l'axe $(O\,;\vec{\imath})$ et les équations des tangentes à (C) en ces points.

4°) Tracer la courbe (C) sur la figure du 1°.

Exercice II (9 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$.

Sur la sphère (Σ) de centre O et de rayon 1, on considère les points :

N de coordonnées cartésiennes $(0\,;0\,;1)$ $\quad$ S de coordonnées cartésiennes $(0\,;0\,;-1)$

$A \begin{cases} \text{longitude } 90° \text{ Est} \\ \text{latitude } 30° \text{ Sud} \end{cases}$ $\quad$ $B \begin{cases} \text{longitude } 0° \\ \text{latitude } 0° \end{cases}$

Rappels : dans un triangle sphérique (ABC), avec les notations usuelles, on a les relations :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin \hat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin c}.$$

1°) a) Faire une figure : placer les points N, S, A et B.

b) Justifier que les coordonnées cartésiennes de A et de B sont respectivement $\left(0\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$ et $(1\,;\,0\,;\,0)$.

2°) Déterminer les éléments du triangle sphérique (SAB).

3°) Soit T l'inversion de pôle N et de puissance 4.

a) Quelle est l'image de la sphère (Σ) par l'inversion T ?

b) Soient A' et B' les images respectives de A et de B par l'inversion T.

En utilisant la relation $\overrightarrow{NM'} = \dfrac{4}{NM^2}\overrightarrow{NM}$, où M' désigne l'image par T d'un point M quelconque, calculer les coordonnées cartésiennes de A' et de B'. Placer les points A' et B' sur la figure.

4°) a) En déduire la distance $A'B'$.

b) Calculer la différence d entre la distance $A'B'$ et la longueur du petit arc de grand cercle d'extrémités A et B.

5°) La Terre est assimilé à la sphère (Σ), dont on exprime maintenant le rayon en kilomètres, en prenant $R = 6380$ km.

Exprimer la différence d en kilomètres, arrondie au km près.