BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

GÉOMÈTRE - TOPOGRAPHE

session 2000

Épreuve de MATHÉMATIQUES

durée : 2 heures **coefficient : 2**

L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 *(6 points)*

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

L'unité de mesure d'angle est le radian.

Sur une sphère de centre O :

– deux points A et B déterminent l'arc $\overset{\frown}{AB}$ sur le grand cercle passant par A et B ;

– trois points A, B et C déterminent les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CA}$ qui constituent le « triangle sphérique » ABC.

Avec les notations usuelles :

– a désigne la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$;

– $\hat{A}$ désigne la mesure de l'angle formé par les tangentes en A aux arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AC}$.

On rappelle la formule : $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}$

1°) On considère les points $A\ (1\,;\,1\,;\,1)$ et $B\left(0\,;\,\sqrt{3}\,;\,0\right)$.
Déterminer une équation de la sphère (S), de centre O, passant par A.
Justifier que B appartient à (S).
Calculer $\cos\widehat{AOB}$ et $\sin\widehat{AOB}$.

2°) Soit r une rotation d'axe (OB) et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Déterminer l'image de (S) par r et en déduire que l'image C du point A par r est un point de (S). Quelle est l'image par r de l'arc $\overset{\frown}{AB}$?
Que peut-on en déduire :
– pour la mesure d'angle $\hat{B}$;
– pour a et c, côtés du triangle sphérique ?
Calculer b, $\hat{A}$ et $\hat{C}$.

EXERCICE 2 *(14 points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$ (unité : 1 cm).
Soit I l'inversion de pôle O et de puissance -9.

- A -

1°) Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[A_1A_2]$ avec $A_1\,(-1\,;\,0)$ et $A_2\,(9\,;\,0)$.
Déterminer $I(A_1)$ et $I(A_2)$.
Montrer que $(\mathscr{C})$ est globalement invariant par I.

2°) Soit $(\mathscr{E})$ la conique d'équation $\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.
Reconnaître la nature de $(\mathscr{E})$. Préciser l'axe focal et les sommets de cette conique.
Déterminer les points d'intersection C et D de $(\mathscr{E})$ avec l'axe des ordonnées.

3°) Représenter $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{C})$ sur un même dessin.

- B -

Soit $(\mathscr{K})$ la courbe d'équation polaire $\rho(\theta)=5+4\cos\theta$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$.

1°) Montrer que pour tracer $(\mathscr{K})$ on peut d'abord se restreindre à prendre θ dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

2°) Étudier le sens de variation de ρ sur $[0\,;\,\pi]$.
Préciser les tangentes à $(\mathscr{K})$ aux points correspondants à $\theta=0$ et $\theta=\pi$.

3°) Tracer $(\mathscr{K})$ sur le même dessin que $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{C})$.
(On placera les points de $(\mathscr{K})$ correspondant à $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$).

- C -

Soit M un point du plan et $(r\,;\,\theta)$ un couple de coordonnées polaires de ce point.

1°) Donner, en fonction de r et de θ, les coordonnées cartésiennes de M.

2°) $M(r\,;\,\theta)$ est maintenant un point de $(\mathscr{E})$.
Vérifier que r et θ sont tels que $[4r\cos\theta+9]^2=25r^2$.
En déduire que soit $r=r_1(\theta)=\dfrac{-9}{5+4\cos\theta}$, soit $r=r_2(\theta)=\dfrac{9}{5-4\cos\theta}$.
Dans le premier cas, comment peut-on, géométriquement, traduire la relation de points de $(\mathscr{E})$ et de $(\mathscr{K})$ ayant un même angle polaire θ ?