BTS Géomètre Topographe – Sujet 1999

Attention : cet exercice Iest maintenant devenu hors programme.

Exercice I (8 points)

La réalisation d'un certain type de dossiers techniques nécessite trois travaux consécutifs : T (relevé topographique), R (rédaction) et D (tirage et assemblage des dossiers).

On considère que les durées respectives, en jours, nécessaires à l'exécution de chacun des travaux T, R et D, sont des variables aléatoires, notées X_T, X_R et X_D.

Une étude statistique effectuée dans un cabinet de géomètre donne les lois de probabilités suivantes :

pour X_T,

durée en jours, x_i	8	9	10
$P(X_T = x_i)$	0,1	0,4	0,5

pour X_R,

durée en jours, x_i	4	5	6
$P(X_R = x_i)$	0,3	0,6	0,1

et pour X_D,

durée en jours, x_i	3	4
$P(X_D = x_i)$	0,6	0,4

1°) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de chacune des variables aléatoires X_T, X_R et X_D.

2°) On suppose que les trois types de travaux sont indépendants ; on note X la variable aléatoire qui,à chaque dossier, associe le nombre de jours nécessaires à sa réalisation : $X = X_T + X_R + X_D$.

a) Calculer $E(X)$.

b) Quelles sont les différentes possibilités pour que $(X = 19)$?
Montrer que $P(X = 19) = 0,166$.

c) Sachant qu'un dossier a été réalisé en 19 jours, calculer à 0,001 près la probabilité que l'exécution du relevé topographique ait nécessité 10 jours.

3°) a) Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.
(On ne fera pas figurer sur la copie les calculs conduisant à ce tableau).
En déduire la valeur (arrondie à 0,1 près) de l'écart type $\sigma(X)$.

b) Comment, en utilisant les variances $V(X_T)$, $V(X_R)$ et $V(X_D)$, pouvait-on obtenir ce résultat ?

Exercice II (12 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm. Les tracés de droites et de courbes seront effectués sur la feuille de papier millimétré jointe.

On considère la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation : $y = \dfrac{x^2}{4}$.

1°) a) Vérifier que $(\mathscr{P})$ admet pour foyer le point F, de coordonnées $(0\,;1)$.

b) Tracer $(\mathscr{P})$.

2°) Pour tout réel t non nul, on considère le point M de $(\mathscr{P})$ d'abscisse t.

On note H le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses.

a) Déterminer, en fonction de t, une équation cartésienne de chacune des droites (OM) et (FH).

b) Montrer que le point d'intersection de ces deux droites appartient à la courbe $(\mathscr{E})$ d'équation $x^2 + (2y-1)^2 = 1$.

c) Préciser la nature de $(\mathscr{E})$, son centre et ses sommets.

(*On ne demande pas son tracé sur la copie*).

3°) Soit (D) la droite perpendiculaire à (OM) et passant par H.

a) Déterminer une équation cartésienne de (D).

En déduire qu'elle passe par un point fixe Ω, dont on précisera les coordonnées.

b) On note Q le point d'intersection des droites (D) et (OM).

Montrer que Q appartient au cercle $(\mathscr{C})$, d'équation $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

Tracer $(\mathscr{C})$ sur le même graphique que $(\mathscr{P})$.

4°) On considère les fonctions f et g, définies sur l'intervalle $[-1\,;1]$ par :

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = 2 - \sqrt{4-x^2}.$$

a) Déterminer les développements limités au voisinage de $x = 0$, à l'ordre 4, de $f(x)$ et de $g(x)$.

b) Quelles positions relatives, au voisinage de O, des trois courbes $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{E})$ peut-on en déduire ?