ACADEMIE DE MONTPELLIER Session 1998

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

GEOMETRE TOPOGRAPHE

Epreuve : **MATHEMATIQUES**	Durée : 3 Heures	Coefficient : 2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage du formulaire officiel de mathématiques et des instruments à calcul est autorisé.

- SUJET -

EXERCICE 1 (4 points)
Les trois questions sont indépendantes les unes des autres.
Une machine produit en grande série des billes pour roulements. Le diamètre (en cm) de ces billes est distribué suivant une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart type $\tau = 0,0025$.

1°/ On extrait des échantillons aléatoires (non exhaustifs) de 100 billes. On admet que le diamètre moyen des billes de chaque échantillon est une variable aléatoire, de moyenne μ et d'écart type $\dfrac{\tau}{10}$. Le premier échantillon extrait présente une moyenne $\mu_{\mathrm{e}} = 0,499$ cm. A partir de là, donner une estimation par intervalle de confiance au seuil 99 % du diamètre moyen μ des billes.

2°/ On admet que le diamètre moyen des billes est $\mu = 0,499$ cm. Une bille est conforme si son diamètre est compris entre 0,495 et 0,505 cm. Calculer la probabilité pour une bille d'être conforme.

3°/ Dans cette question, on note C l'événement : "la bille est conforme". On admet que la probabilité de l'événement C est $p(\mathrm{C}) = 0,94$. Les billes sont testées afin d'écarter les billes non conformes. Il apparait qu'avec ce test :
- la probabilité pour une bille conforme d'être acceptée est 0,99
- la probabilité pour une bille d'être rejetée est 0,05.
Calculer la probabilité pour une bille acceptée d'être conforme.

EXERCICE 2 (8 points)

On considère la fonction f à valeurs réelles, définie sur $I =]-\pi\,;\,\pi[$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{3 + \cos x - 2\cos^2 x}.$$

A/ Préambule :

1°/ Donner la valeur pour $t = -1$ des polynômes $u(t) = -2t^2 + t + 3$ et $v(t) = 2t^3 - t + 1$.

2°/ En déduire la factorisation des polynômes u et v.

B/ Etude de la fonction :

1°/ Montrer que f est impaire.

2°/ Montrer que $f(x) = \dfrac{\sin x}{(1+\cos x)(3 - 2\cos x)}$. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} f(x)$.

3°/ Montrer que, pour tout x appartenant à I, $f'(x) = \dfrac{1 - \cos x + 2\cos^3 x}{(3 + \cos x - 2\cos^2 x)^2}$.

4°/ Montrer que, pour tout x appartenant à I, $f'(x)$ et $(1 + \cos x)$ sont de même signe. (On pourra utiliser la factorisation de $v(t)$ obtenue au A.1°/).

En déduire les variations de f sur I.

C/ Etude de la courbe $\mathcal{C}$:

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec comme unité 2 cm.

1°/ Soit (T) la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Ecrire une équation de (T).

2°/ Sur le même dessin, représenter $\mathcal{C}$ et (T).

D/ Calcul intégral :

1°/ Déterminer a et b tels que, pour tout t appartenant à $[0\,;\,1]$:

$$\frac{1}{-2t^2 + t + 3} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{-2t+3}.$$

2°/ Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$. On donnera la valeur exacte du résultat. On conseille le changement de variable $t = \cos x$.

EXERCICE 3 (8 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$.

A/ Configuration dans l'espace :

1°/ Soit (K) le cône de révolution d'axe $(O, \vec{k})$, de sommet $S(0\,;\,0\,;\,\sqrt{3})$ et de demi-angle au sommet $\dfrac{\pi}{6}$. Démontrer que (K) est l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant :

$$3x^2 + 3y^2 - (z - \sqrt{3})^2 = 0.$$

2°/ Soit (Σ) la sphère de centre O, de rayon 1. Montrer que l'intersection $(K) \cap (\Sigma)$ du cône et de la sphère est la réunion de deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) dont on donnera les centres et les rayons respectifs.

3°/ Soit $\mathcal{J}$ l'inversion de pôle S et de puissance 2. On note $\mathcal{J}(M)$ l'image d'un point M par $\mathcal{J}$.

a) On note $A\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $B\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,;\,\sqrt{\dfrac{1}{3}}\,;\,0\right)$. Déterminer $A' = \mathcal{J}(A)$ et $B' = \mathcal{J}(B)$.

b) Déterminer, en les justifiant, les images respectives de (Γ_1) et de (Γ_2) par $\mathcal{J}$.

B/ Trigonométrie sphérique :

On rappelle que si m est le projeté orthogonal de M sur $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$, la latitude φ et la longitude θ du point M seront $\varphi = (\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM})$ et $\theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{Om})$.

1°/ On donne le point $P(0\,;\,0\,;\,1)$.

Donner les coordonnées sphériques des points A, B, P sur la sphère (Σ).

2°/ Résoudre le triangle sphérique ABP.

Rappel : dans le triangle sphérique de sommets A, B, C si a, b, c sont les mesures des côtés et $\widehat{A}$ la mesure de l'angle en A : $\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos \widehat{A}$.