BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
Épreuve de Mathématiques
GROUPEMENT C

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Agroéquipement	2
Étude et réalisation d'outillage de mise en forme des matériaux	2
Industries céramiques	2
Industries céréalières	2
Industrie des matériaux souples (2 options)	1
Industries papetières	2
Mise en forme des alliages moulés	2
Mise en forme des matériaux par forgeage	2
Productique bois et ameublement	1,5
Productique textile (4 options)	2
Réalisation d'ouvrages chaudronnés	2
Systèmes constructifs bois et habitat	2

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 2 pages numérotées 1/2 et 2/2.
Plus le formulaire de mathématiques page 1 à 5.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

CALCULATRICE AUTORISÉE

Sont autorisées toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes.

Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.
Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices.

Exercice I (11 points)

A – On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 8$, où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1°) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2$ est une solution de (E).

2°) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

3°) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

4°) Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions

$$f(0) = 2 \text{ et } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\mathrm{e}}{2} + 2.$$

B – Soit la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x} + 2$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1°) a) Calculer la limite de f en $-\infty$, puis la limite de f en $+\infty$.

b) En déduire que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

c) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

2°) Calculer $f'(x)$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3°) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 4 cm sur l'axe des ordonnées).

4°) Soit la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}$.
Calculer $k'(x)$.
En déduire l'aire, en cm^2, du domaine compris entre $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 4$.
On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale arrondie à 10^{-2} près.

Exercice II (9 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

A – Dans une usine, on utilise conjointement deux machines M_1 et M_2 pour fabriquer des pièces cylindriques en série. Pour une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement 0,010 et 0,008. De plus, la probabilité de l'événement « la machine M_2 est en panne sachant que M_1 est en panne » est égale à 0,4.

1°) Montrer que la probabilité d'avoir les deux machines en panne pendant la même période est égale à 0,004.

2°) En déduire la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne.

B – Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre des pièces fabriquées.

1°) On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque pièce prélevée au hasard, associe son diamètre exprimé en millimètres, suit une loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2.
Une pièce est défectueuse si son diamètre n'appartient pas à l'intervalle $[246\,;\,254]$.
On prélève au hasard une pièce dans la production.

Calculer la probabilité d'avoir une pièce défectueuse.

2°) On admet dans la suite que la probabilité de prélever une pièce défectueuse dans la production est égale à 0,046. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 pièces prises au hasard, associe le nombre de pièces défectueuses de ce lot. Un lot de 50 pièces prises au hasard peut être assimilé à un tirage avec remise.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y. Donner les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse dans un lot. (On donnera une valeur décimale approchée arrondie à 10^{-3} près).

c) Calculer la probabilité d'avoir au plus 2 pièces défectueuses dans un lot. (On donnera une valeur décimale approchée arrondie à 10^{-3} près).

3°) Après un certain temps de fonctionnement de la machine, pour vérifier le bien fondé de l'hypothèse faite en B - 1°/, on s'intéresse à la moyenne des diamètre des pièces produites. Pour cela, on étudie un échantillon de 100 pièces prises au hasard et avec remise dans la production. La moyenne $\bar{x}$ des diamètres des pièces de cet échantillon est égale à 249,7. On suppose que la variable aléatoire $\bar{X}$ qui, à tout échantillon de 100 pièces prélevées au hasard et avec remise, associe la moyenne des diamètres de ces pièces suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{2}{\sqrt{100}}$. Au vu de cet échantillon, déterminer un intervalle de confiance centré en $\bar{x}$ de la moyenne μ avec le coefficient de confiance 95 %.