Exercice I (9 points)

Partie A

L'étude d'un mouvement a montré que la vitesse exprimée en mètres par seconde est une fonction dérivable y de la variable réelle positive t vérifiant l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 50$.

1°) Résoudre, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

2°) Déterminer une fonction constante solution de l'équation (E) sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3°) En déduire la solution générale de (E) sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

4°) Sachant que la vitesse initiale à l'instant $t = 0$ est nulle, déterminer la vitesse y en fonction de t.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 25(1 - \mathrm{e}^{-2t})$.
On donne sur la feuille *annexe*, à remettre avec la copie, la représentation graphique Γ de la fonction f dans un repère orthogonal.
La fonction f représente la fonction vitesse déterminée dans la partie A.

Le but de l'exercice est de justifier et de compléter la représentation graphique de la fonction f donnée en annexe.

1°) a) Par lecture graphique déterminer une valeur arrondie au dixième de l'instant t_0 où la vitesse dépasse 20 m.s^{-1}.

b) Résoudre l'inéquation $f(t) > 20$. En déduire la valeur exacte de t_0.

2°) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3°) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

4°) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point O, origine du repère. Construire cette droite sur l'annexe à remettre avec la copie.

5°) En utilisant le graphique donné en annexe, estimer l'aire en unités d'aire de la partie du plan comprise entre la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $t = 1$ et $t = 2$.

6°) a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t$. En donner une interprétation graphique.

Exercice II (11 points)

Les résultats seront arrondis au centième.

Partie A

Dans une usine U, une machine produit des barres de métal.

Dans cette partie on étudie la longueur de ces barres.

On définit la variable aléatoire X qui à chaque barre associe sa longueur exprimée en centimètres et on admet que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $m = 92,50$ et d'écart-type σ.

Une barre de la production est mise au rebut si sa longueur est inférieure à 92,20 cm ou supérieure à 92,80 cm.

1°) On suppose que $\sigma = 0,20$.

- **a)** Calculer la probabilité qu'une barre extraite au hasard dans la production de la machine soit mise au rebut.
- **b)** Déterminer le réel a tel que la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs comprises entre $92,5 - a$ et $92,5 + a$ soit égale à 0,95.

2°) Quelle valeur faut-il donner à l'écart type σ pour que la probabilité de mise au rebut d'une barre soit égale à 0,08 ?

Dans la suite de l'exercice, on suppose que l'écart type est $\boldsymbol{\sigma = 0,17}$.

Partie B

Dans la production de la machine, 8 % des barres sont mises au rebut. On prélève un lot de 30 barres extraites au hasard dans la production de la machine. Le nombre de barres produites est suffisamment important pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 barres.

On appelle N la variable aléatoire qui à chaque lot de 30 barres associe le nombre de barres qui sont mises au rebut dans ce lot.

1°) Déterminer la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire N et donner ses paramètres.
Justifier.

2°) Calculer la probabilité qu'aucune barre de ce lot ne soit mise au rebut.

3°) Calculer la probabilité que dans un tel lot, au moins 90 % des barres ne soient pas mises au rebut.

Partie C

La machine se déréglant dans le temps, on veut tester la moyenne m des longueurs des barres produites par la machine. On se demande si on peut accepter, au seuil de risque de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la moyenne m des longueurs des barres est encore de 92,50 cm.

Pour cela, on construit un test d'hypothèse bilatéral.

On suppose que la variable aléatoire $\bar{X}$, qui à tout échantillon de 30 barres de métal prélevées au hasard associe la moyenne des longueurs en centimètres des barres de l'échantillon, suit une loi normale de moyenne m et d'écart type 0,03.

On choisit l'hypothèse nulle H_0 : « $m = 92,50$ ».

1°) Donner l'hypothèse alternative H_1.

2°) Sous l'hypothèse H_0, calculer le réel h tel que $P(92,5 - h < X < 92,5 + h) = 0,95$.

3°) Énoncer la règle de décision du test.

4°) On prélève un échantillon de 30 barres extraites au hasard dans la production de la machine, on obtient les résultats suivants :

Longueurs (en cm)	$92,1$	$92,2$	$92,3$	$92,4$	$92,5$	$92,6$	$92,7$	$92,8$	$92,9$
Nombre de barres	3	2	6	5	5	3	2	2	2

Au vu des résultats de cet échantillon, peut-on admettre au seuil de risque de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la moyenne m des longueurs des barres est encore de 92,50 cm ?

Exercice 1

Courbe représentative de la fonction f.