

Exercice I (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 8e^x$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} , y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1°) Déterminer les solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E₀) :

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

2°) Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 4x^2 e^x$.

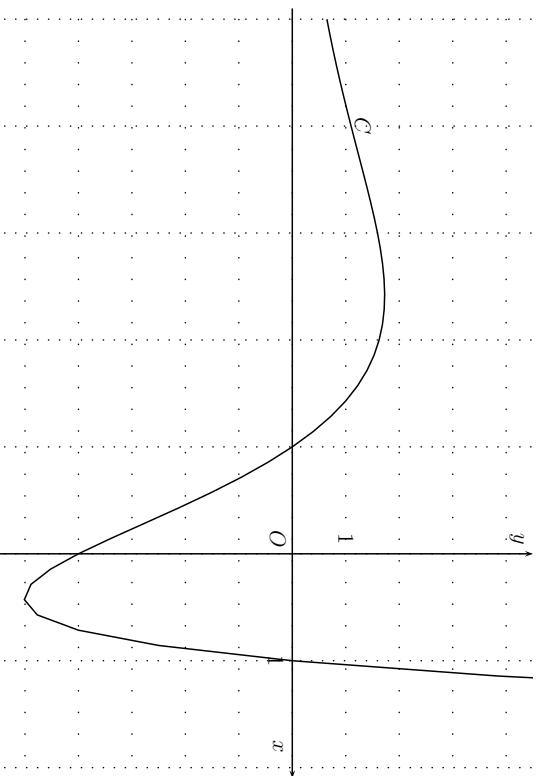
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3°) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4°) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

Partie B : Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (4x^2 - 4)e^x$. Sa courbe représentative C dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1°) a) Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = 4(x^2 + 2x - 1)e^x$.

b) Donner sans justification la valeur exacte et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'abscisse de chacun des points de la courbe C où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2°) a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = -4 - 4x + 2x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

b) Déduire du a) une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

c) Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

Partie C : Calcul intégral

Dans cette partie, les questions 1° et 2° peuvent être traitées de façon indépendante.

1°) La fonction f définie au début de la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

Donc, pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = -f''(x) + 2f'(x) + 8e^x$.

En déduire une primitive F de la fonction f sur \mathbb{R} .

2°) a) Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

b) Dans cette question, on admet que la fonction F définie sur \mathbb{R} par

$$F(x) = (4x^2 - 8x + 4)e^x \text{ est une primitive de la fonction } f.$$

Déduire de ce qui précède l'aire A , en unités d'aire, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

| | |
|----------------------|--------------|
| GROUPEMENT B DES BTS | SESSION 2009 |
| Mathématiques | MATGRB 1 |
| Durée : 2 heures | Page : 2/5 |

| | |
|----------------------|--------------|
| GROUPEMENT B DES BTS | SESSION 2009 |
| Mathématiques | MATGRB 1 |
| Durée : 2 heures | Page : 3/5 |

Exercice II (8 points)

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

On s'intéresse au chantier de construction d'un tronçon de TGV.

Les travaux de terrassement nécessitent la mise à disposition d'une flotte importante de pelles sur chenilles et de camions-benne.

La réalisation de l'ouvrage nécessite de grandes quantités de fers à béton.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} .

Partie A : Loi normale

On note X la variable aléatoire qui, à chaque pelle prélevée au hasard dans la flotte, associe le nombre de m^3 de matériaux extraits pendant la première heure du chantier. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart type 10.

1°) Calculer $P(110 \leq X \leq 130)$.

2°) Calculer la probabilité que la pelle prélevée extraie moins de 100 m^3 pendant la première heure du chantier.

Partie B : Loi de Poisson

On note Y la variable aléatoire qui, à toute heure travaillée prise au hasard pendant la première semaine du chantier, associe le nombre de camions-benne entrant dans la zone 1 du chantier pour charger des matériaux. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi de Poisson de paramètre 5.

1°) Calculer la probabilité de l'événement

A : « pendant une heure prise au hasard il n'y a aucun camion-benne sur la zone 1 du chantier. »

2°) Calculer la probabilité de l'événement

B : « pendant une heure prise au hasard il entre au plus quatre camions-benne sur la zone 1 du chantier. »

| | |
|----------------------|--------------|
| GROUPEMENT B DES BTS | SESSION 2009 |
| Mathématiques | MATGRB 1 |
| Durée : 2 heures | Page : 4/5 |

Partie C : Loi binomiale

On note E l'événement : « un camion-benne pris au hasard dans la flotte n'a pas de panne ou de sinistre pendant le premier mois du chantier. »

On suppose que la probabilité de l'événement E est 0,9.

On prélève au hasard 10 camions-benne dans la flotte pour les affecter à une zone du chantier. Le nombre de camions-benne de la flotte est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 camions-benne.

On désigne par Z la variable aléatoire qui à tout prélèvement de ce type associe le nombre de camions-benne n'ayant pas eu de panne ou de sinistre pendant le premier mois du chantier.

1°) Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2°) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun des 10 camions-benne n'ait de panne ni de sinistre pendant le premier mois du chantier.

Partie D : Test d'hypothèse

De grandes quantités d'un certain type de fers cylindriques pour le béton armé, de diamètre 25 millimètres, doivent être réceptionnées sur le chantier.

On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler, au moment de la réception d'une livraison, la moyenne μ de l'ensemble des diamètres en millimètres des fers à béton.

On note M la variable aléatoire qui, à chaque fer prélevé au hasard dans la livraison, associe son diamètre en millimètres. La variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type 0,2.

On désigne par \bar{M} la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 fers prélevés dans la livraison, associe la moyenne des diamètres des fers de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 25$. Dans ce cas, la livraison est dite conforme pour le diamètre. L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 25$. Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1°) Sous l'hypothèse H_0 , on admet que la variable aléatoire \bar{M} suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type 0,02.

On admet également que : $P(24,961 \leq \bar{M} \leq 25,039) = 0,95$. Ce résultat, où 0,95 est une valeur approchée, n'a pas à être démontré.

Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

2°) On prélève un échantillon aléatoire de 100 fers à béton et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est $\bar{x} = 24,978$.

Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?