

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

Session 1999

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B

MATGRB

Durée : 2 heures

SPECIALITÉS	COEFFICIENT
Aménagement finition	2
Assistance technique d'ingénieur	2
Bâtiment	2
Conception et réalisation de carrosseries	2
Construction navale	2
Constructions métalliques	2,5
Domotique	2
Enveloppe du bâtiment : façades - étanchéité	2
Étude et économie de la construction	2
Fluides - énergies - environnements	2
Géologie appliquée	1,5
Industries graphiques : communication graphique	2
Industries graphiques : productique graphique	2
Maintenance et après-vente automobile	2
Maintenance et après-vente des engins de travaux publics et de manutention	1
Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques	1
Maintenance industrielle	2
Mécanique et automatisme industriels	2
Microtechniques	1,5
Moteurs à combustion interne	2
Productique mécanique	2
Traitement des matériaux	3
Travaux publics	2

Les calculatrices de poches sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999. La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (9 points)**Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.**

Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces : P_1 et P_2 .

- 1) Une pièce P_1 est considérée comme bonne si sa longueur, en centimètres, est comprise entre 293,5 et 306,5.

On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce P_1 choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.

On suppose que L suit la loi normale de moyenne 300 et d'écart type 3.

Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'une pièce P_1 soit bonne.

- 2) On note A l'événement : « une pièce P_1 choisie au hasard dans la production des pièces P_1 est défectueuse ».

On note de même B l'événement : « une pièce P_2 choisie au hasard dans la production des pièces P_2 est défectueuse ».

On admet que les probabilités des deux événements A et B sont $P(A) = 0,03$ et $P(B) = 0,07$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer, à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « les deux pièces du module sont défectueuses » ;

E_2 : « au moins une des deux pièces du module est défectueuse » ;

E_3 : « aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse ».

- 3) Dans un important stock de ces modules, on prélève au hasard 10 modules pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 modules.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 modules, associe le nombre de modules réalisant l'événement E_3 défini au 2°.

On suppose que la probabilité de l'événement E_3 est 0,902.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que, dans un tel prélèvement, 9 modules au moins réalisent l'événement E_3 .

EXERCICE 2 (11 points)

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1$,

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} , y' la fonction dérivée de y et y'' sa dérivée seconde.

- 1) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y' + y = 0$.
- 2) Déterminer les constantes réelles a, b, c pour que la fonction g définie sur \mathbb{R} par :
 $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution particulière de l'équation (E).
- 3) Dédire du 1°) et du 2°) l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
- 4) Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f(1) = e + \frac{3}{2}$.

B. Étude d'une fonction

Soit f et g les fonctions de la variable réelle x définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = xe^x + \frac{x^2}{2} + x \text{ et } g(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f et \mathcal{P} la courbe représentative de g dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)]$.
Interpréter graphiquement le dernier résultat.
- 2) Étudier sur \mathbb{R} la position relative des deux courbes \mathcal{C} et \mathcal{P} .
- 3) a) Démontrer que, pour tout x de \mathbb{R} : $f'(x) = (x+1)(e^x + 1)$.
b) Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
- 4) a) Compléter le tableau de valeurs figurant sur la feuille annexe (à rendre avec la copie); les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2} près.
b) Construire la courbe \mathcal{C} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) où figure la courbe \mathcal{P} .
- 5) a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que la valeur exacte en cm^2 de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , la parabole \mathcal{P} et les droites d'équation $x = -3$ et $x = -2$ est $A = 4(-4e^{-3} + 3e^{-2})$.
b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de A .

Partie B

4°) a)

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(x)$									

b)

