BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

Session 1999

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B MATGRB

Durée : 2 heures

SPECIALITÉS	COEFFICIENT
Aménagement finition	2
Assistance technique d'ingénieur	2
Bâtiment	2
Conception et réalisation de carrosseries	2
Construction navale	2
Constructions métalliques	2,5
Domotique	2
Enveloppe du bâtiment : façades - étanchéité	2
Étude et économie de la construction	2
Fluides - énergies - environnements	2
Géologie appliquée	1,5
Industries graphiques : communication graphique	2
Industries graphiques : productique graphique	2
Maintenance et après-vente automobile	2
Maintenance et après-vente des engins de travaux publics et de manutention	1
Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques	1
Maintenance industrielle	2
Mécanique et automatisme industriels	2
Microtechniques	1,5
Moteurs à combustion interne	2
Productique mécanique	2
Traitement des matériaux	3
Travaux publics	2

Les calculatrices de poches sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999. La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (9 points)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces : P_1 et P_2.

1) Une pièce P_1 est considérée comme bonne si sa longueur, en centimètres, est comprise entre 293,5 et 306,5.

On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce P_1 choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.

On suppose que L suit la loi normale de moyenne 300 et d'écart type 3.

Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'une pièce P_1 soit bonne.

2) On note A l'événement : « une pièce P_1 choisie au hasard dans la production des pièces P_1 est défectueuse ».

On note de même B l'événement : « une pièce P_2 choisie au hasard dans la production des pièces P_2 est défectueuse ».

On admet que les probabilités des deux événements A et B sont $P(A) = 0,03$ et $P(B) = 0,07$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer, à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « les deux pièces du module sont défectueuses » ;

E_2 : « au moins une des deux pièces du module est défectueuse » ;

E_3 : « aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse ».

3) Dans un important stock de ces modules, on prélève au hasard 10 modules pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 modules.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 modules, associe le nombre de modules réalisant l'événement E_3 défii au 2°.

On suppose que la probabilité de l'événement E_3 est 0,902.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que, dans un tel prélèvement, 9 modules au moins réalisent l'événement E_3.

EXERCICE 2 (11 points)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2}{2} - x - 1$,
où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa dérivée seconde.

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y' + y = 0$.

2) Déterminer les constantes réelles a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution particulière de l'équation (E).

3) Déduire du 1°) et du 2°) l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4) Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f(1) = \mathrm{e} + \dfrac{3}{2}$.

B. Étude d'une fonction

Soit f et g les fonctions de la variable réelle x définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2} + x \text{ et } g(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et $\mathscr{P}$ la courbe représentative de g dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - g(x)]$.
Interpréter graphiquement le dernier résultat.

2) Étudier sur $\mathbb{R}$ la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

3) a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (x+1)(\mathrm{e}^x + 1)$.

b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4) a) Compléter le tableau de valeurs figurant sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) ; les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2} près.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) où figure la courbe $\mathscr{P}$.

5) a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que la valeur exacte en cm^2 de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la parabole $\mathscr{P}$ et les droites d'équation $x = -3$ et $x = -2$ est $\mathrm{A} = 4(-4\,\mathrm{e}^{-3} + 3\,\mathrm{e}^{-2})$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de A.

Partie B

4°) a)

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1
$f(x)$									

b)