SESSION 2006

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
AGENCEMENT DE L'ESPACE ARCHITECTURAL

MATHÉMATIQUES

SUJET

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.
Le sujet est composé de 3 pages numérotées de 2/8 à 4/8.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 4 pages, numérotées 5/8 à 8/8.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

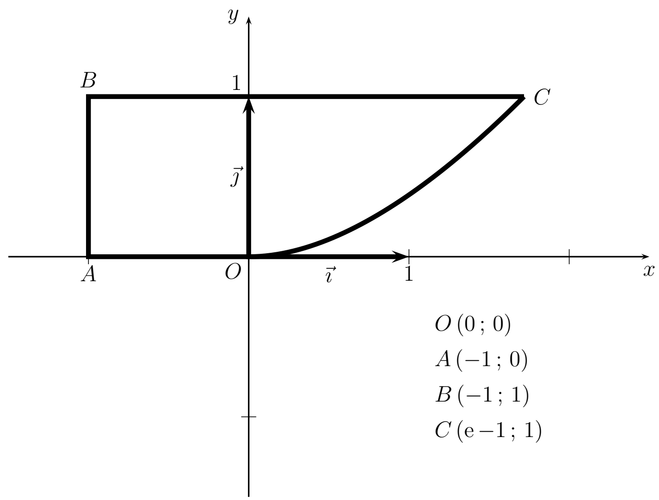
CODE ÉPREUVE : 0006ADMAT	EXAMEN : BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR		SPÉCIALITÉ : AGENCEMENT DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL	
SESSION 2006	SUJET	ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES		
Durée : 2 h	Coefficient : 2	N° sujet : 19EM06		Page : 1/8

Exercice 1. (10 points)

Un technicien doit réaliser un plan de travail destiné à supporter du matériel informatique.
Ce plan de travail sera découpé dans un panneau MDF (panneau de fibres de bois de moyenne densité), puis recouvert de stratifié.

Partie A : Modélisation.

Le technicien dispose du schéma ci-dessous, représentant dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$, la surface du plan de travail. L'unité représente **1 mètre** en vraie grandeur. Les dimensions réelles sont respectées au millimètre près.



$O\,(0\,;\,0)$
$A\,(-1\,;\,0)$
$B\,(-1\,;\,1)$
$C\,(\mathrm{e}-1\,;\,1)$

L'arc de courbe $\widehat{OC}$ doit, de plus, vérifier les contraintes suivantes :

a) Il doit être tangent en O à l'axe des abscisses.

b) Il doit admettre en C une tangente ayant pour coefficient directeur 1.

Le technicien cherche à modéliser l'arc $\widehat{OC}$ à l'aide d'une fonction dont la courbe représentative correspond à cet arc.
Après plusieurs essais, il pense pouvoir utiliser la fonction f définie sur $[0\,;\,\mathrm{e}-1]$ par :

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x.$$

1°) Calculer $f(0)$ et $f(\mathrm{e}-1)$.

2°) Montrer que la dérivée f' de f sur $[0\,;\,\mathrm{e}-1]$ est définie par $f'(x) = \ln(x+1)$.

3°) À partir des résultats précédents, vérifier que la courbe $\mathscr{C}$, représentative de f dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$, passe bien par les points O et C et satisfait aux contraintes a) et b) énoncées ci-dessus.

Partie B : Étude de la fonction f.

1°) Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire le sens de variation de la fonction f.

2°) Écrire l'équation de la tangente T à la courbe C représentative de f an point d'abscisse $\mathrm{e}-1$.

3°) Recopier sur la copie puis compléter le tableau de valeurs suivant (les résultats seront donnés à 10^{-3} près) :

x	0	$0,5$	1	$1,5$	$\mathrm{e}-1$
$f(x)$					

4°) Tracer la courbe C ainsi que la tangente T à C au point C dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ (unité graphique 10 cm).

Partie C : Calcul de la masse du plateau en MDF.

1°) Vérifier que la fonction G définie par $G(x)=\dfrac{(x+1)^2}{2}\left(\ln(x+1)-\dfrac{1}{2}\right)$ est une primitive sur l'intervalle $[0\,;\mathrm{e}-1]$ de la fonction g définie par $g(x)=(x+1)\ln(x+1)$. En déduire une primitive F de la fonction f sur $[0\,;\mathrm{e}-1]$.

2°) a) Calculer l'aire (en unités d'aire) du domaine plan compris entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\mathrm{e}-1$.

b) En déduire l'aire, en m^2, du plateau découpé par le technicien (en donner une valeur approchée à 10^{-3} près).

3°) Calculer sa masse, à dix grammes près, sachant que le panneau de MDF utilisé a une épaisseur de 40 mm et que sa masse volumique est de 750 kg/m^3.

Exercice 2. (10 points)

Tous les résultats de cet exercice seront donnés à 10^{-2} près,

Les panneaux MDF de 40 mm d'épaisseur sont fabriqués en série par l'usine PANCOL.

1°) Afin de vérifier le bon réglage de la chaîne de production, on a mesuré l'épaisseur, en mm, de 100 panneaux. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

x_i : épaisseur en mm	[39,7 ; 39,8[	[39,8 ; 39,9[	[39,9 ; 40,0[	[40,0 ; 40,1[	[40,1 ; 40,2[	[40,2 ; 40,3]
n_i : effectifs	1	12	36	41	8	2

Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.

(On remplacera chaque classe par son centre affecté de J'effectif correspondant).

Sachant que la tolérance relative à l'épaisseur est de $\pm 0,20$ mm, calculer le pourcentage de panneaux acceptables du point de vue de leur épaisseur.

2°) On note X la variable aléatoire qui, à chaque panneau pris an hasard dans la production, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On admet que X suit la loi normale de moyenne $m=40$ et d'écart-type $\sigma=0,1$.

Calculer la probabilité qu'un panneau pris au hasard :

a) ait une épaisseur inférieure à 39,8 mm ;

b) soit acceptable, c'est-à-dire ait une épaisseur appartenant à l'intervalle [39,80 ; 40,20[;

c) ne soit pas acceptable.

3°) On suppose désormais que la probabilité qu'un panneau ne soit pas acceptable est $p=0,05$. Un grossiste achète à l'entreprise PANCOL les panneaux de MDF d'épaisseur 40 mm par lots de 200 panneaux. La constitution d'un lot est assimilée à un tirage de 200 panneaux avec remise. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 200 panneaux, associe le nombre de panneaux qui ne sont pas acceptables dans ce lot.

Quelle est la loi de probabilité de Y ?

Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de Y.

4°) On décide d'approcher la loi de probabilité de Y par une loi de Poisson.

a) Quel est son paramètre ?

b) Quelle est la probabilité que, dans un lot de 200 panneaux, tous les panneaux soient acceptables ?

c) Quelle est la probabilité que, dans un lot de 200 panneaux, il y ait plus de 5 panneaux non acceptables ?