Exercice I (12 points)

Partie A

Soit (E) l'équation différentielle :

$$(\text{E}) : y' + 2y = -x\,\text{e}^{-3x}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1°) Résoudre l'équation différentielle (E_0) :

$$(\text{E}_0) : y' + 2y = 0.$$

2°) a) Montrer que la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = (x+1)\,\text{e}^{-3x}$$

est une solution particulière de (E).

b) En déduire la solution générale de (E).

c) Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur 0 en $x = -1$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par $f(x) = (x+1)\,\text{e}^{-3x}$. On note C sa représentation graphique dans un repère orthonormal (unité graphique : 3 cm).

1°) Étudier les variations de f sur $[-1\,;\,1]$.

2°) Tracer la courbe C.

3°) Montrer que la fonction $F(x) = -\dfrac{1}{9}(3x+4)\,\text{e}^{-3x}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle donné.

4°) Calculer en cm^2 l'aire du domaine D limité par la courbe C, l'axe $x'Ox$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.

Partie C

Une entreprise décide de réaliser un vase pour un jardin en utilisant la forme obtenue en faisant tourner le domaine D autour de l'axe $x'Ox$. Cette forme sera une représentation à l'échelle 1 : 10 du vase. On rappelle que le volume du solide de révolution engendré par la rotation du domaine est en unités de volumes : $V = \pi \displaystyle\int_{-1}^{0} [f(x)]^2\,\text{d}x$.

1°) On considère la fonction f^2 qui à x associe $[f(x)]^2$. Vérifier que la fonction g définie sur $[-1\,;\,1]$ par $g(x) = \left(-\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{7}{18}x - \dfrac{25}{108}\right)\text{e}^{-6x}$ est une primitive de f^2.

2°) Calculer le volume du vase en m^3 à 10^{-3} près.

Exercice II (8 points)
Une entreprise fabrique des pieds métalliques pour des tables. Dans la production d'une journée, on étudie un échantillon de 120 pieds dont on mesure les longueurs. On obtient la série suivante :

Longueur en mm	699,4	699,6	699,8	700,0	700,2	700,4	700,6
Effectif	3	18	12	46	20	19	2

1°) Calculer au 1/10 de millimètre près la moyenne puis l'écart type de cette série.

On note X la variable aléatoire qui, à un pied de table pris au hasard dans la production, associe sa longueur et on admet que X suit une loi normale de moyenne $m = 700$ et d'écart type $\sigma = 0,25$.
Un pied est estimé conforme si sa longueur appartient à l'intervalle $[699,6\,;\,700,4]$.

2°) Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité $P(699,6 \leqslant X \leqslant 700,4)$.

3°) En déduire la probabilité qu'un pied, pris au hasard dans la production, ne soit pas conforme.

Ces pieds sont conditionnés par lot de 4. On considère que le nombre de pieds produits est suffisamment important pour permettre d'assimiler un lot à un tirage de 4 pieds choisis au hasard et avec remise.

On admet désormais que la probabilité qu'un pied, pris au hasard dans la production, ne soit pas conforme est 0,10.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 4 pieds, associe le nombre de pieds non conformes.

4°) Justifier le fait que la variable Y suit une loi binomiale et en donner les paramètres.

5°) Calculer, à 10^{-2} près, les probabilités $P(Y = 0)$ et $P(Y \leqslant 1)$.